Писмени испит из математике

Ознака задатка: 333

29. септембар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int e^x \sin 4x \, \mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' = x + \sin 2x.$$

4. Апроксимирати функцију $g(x) = \cos(\sin x)$ Маклореновим полиномом степена 4, а затим израчунати

$$\lim_{x \to 0} \frac{24 + 2x^3 + 5x^4 - 24g(x)}{7x^2 + 2x^3}\,.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x^n - y^n \geqslant 0$$

релација поретка на скупу $\mathbb{R}$ реалних бројева **а)** за $n = 3$; **б)** за $n = 4$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

3. *Теоријско питање:* Функција акумулације и функција стопе раста акумлације (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити функцију акумулације и стопе раста акумулације у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Апроксимирати функцију $z(x, y) = e^{3x} \operatorname{arctg} 2y$ Маклореновим полиномом трећег степена.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

29. септембар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{x - 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост круга $\quad x^2 + y^2 \leqslant 2$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

4. Апроксимирати функцију $g(x) = \ln(\cos x + x\sin x)$ Маклореновим полиномом степена 4, а затим израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{4g(x) - 2x^2 + x^3}{3x^3 + 5x^4}\,.$$

5. Показати да је бинарна релација ϱ задата као

$$x\,\varrho\,y \overset{def}{\iff} x(y^2+1) \leqslant y(x^2+1)$$

једно уређење скупа $(1, +\infty)$, али не и скупа $\mathbb{R}$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}\,.$$

2. *Теоријско питање:* Монотоност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале монотоности функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Номинална и ефективна интересна стопа (дефиниција, међусобни односи и основне особине).
Задатак: Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
У рулету, у једној игри, куглица се може зауставити на једном од поља означеним бројевима од 0 до 36. Посматрамо резултат 13 одређених игара. Колика је вероватноћа случајног догађаја да да се у посматраним играма куглица заустави:

A – редом на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

B – на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

C – сваки пут на истом броју;

D – сваки пут на броју 3?

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/03

16. септембар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = -4x\sqrt{1-x^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \ln(x^2+16)\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$(x^3-2x^2+x-2)y' = 2x^2y+3xy-4y.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3xy+2 \quad \text{уз услов} \quad x^2+y^2=32.$$

5. Испитати монотоност и ограниченост низа (a_n) чији је општи члан дефинисан као:

$$a_n = \frac{1}{2\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 14} + \ldots + \frac{1}{(6n-4)(6n+2)}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/16

16. септембар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{e^x}\,.$$

2. Израчунати површину области оивичене x-осом и кривом

$$f(x) = (x^2-8)e^x$$

у II и III квадранту.

3. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = x\,\mathrm{arctg}(x^2-y^2) \qquad \text{задовољава услов} \qquad xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

4. Зависно од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 4y & + & 11z & + & 2u & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & u & = & b-4 \\ 3x & - & 3y & + & 14z & + & (a+1)u & = & 8. \end{array}$$

5. Бацају се два новчића четири пута.

а) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања падне иста страна на оба новчића.

б) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања на новчићима падне различита страна.

ц) Одредити вероватноћу догађаја да у једном бацању на новчићима падну исте, а у преостала три бацања, различите стране.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/25

29. август 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = e^{y-x}(x^2+y^2).$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & + & (a+1)z & = & a \\ ax & + & ay & + & (a-1)z & = & a \\ (2a+1)x & + & 2ay & + & (3a+2)z & = & a+1. \end{array}$$

5. Одредити најмању вредност реалног параметра a и одговарајућу вредност реалног параметра b тако да функција $f\colon [a,2] \to [0,b]$, задата са $f(x) = |x^2-4x+3|$ буде бијекција, а затим одредити $f^{-1}(x)$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $15/\alpha$

31. август 2016.

1. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Задатак: Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $y = \operatorname{arctg} 2x$ Маклореновим полиномом трећег степена.

3. *Теоријско питање:* Прираштај функције два аргумента (дефиниција).
Задатак: Одредити прираштаје функције $f(x,y) = x + 2ye^{x^2-y^2}$ за прираштаје аргумената Δx и Δy.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену.* Рад овог задатка може обезбедити само најнижу коначну прелазну оцену.
Испитати да ли је релација ϱ дефинисана међу природним бројевима као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\ y = kx$$

релација поретка на скупу $\mathbb{N}$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/04

24. јун 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int (5x^5 + x^2)\, e^{x^3}\, \mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2x^2y^2.$$

5. Одредити граничну вредност низа (a_n), $n \geqslant 2$, уколико иста постоји, чији је општи члан дефинисан као:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^4-2n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4-2n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4+3n}}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/20

3. јун 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int e^x \sin 4x \, \mathrm{d}x.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

4. Зависно од вредности реалних параметара p и q дискутовати и решити система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x & - & 2y & + & pz & - & 2u & = & q+2 \\ x & + & 5y & + & z & - & 2u & = & 3 \\ -2x & + & 22y & + & 3z & - & 6u & = & 6. \end{array}$$

5. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати које од особина линеарног уређења има ова релација на скупу $\mathbb{R}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/17

8. фебруар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 45 = 14x$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$xy' = y + x(1 + e^{-y/x}).$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко његовог прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 29°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/29

8. фебруар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2, 0)$, $B(1, -2)$, $C(2, 0)$ и $D(1, 2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 2xy + y^2 \quad \text{уз услов} \quad y + 6 = x.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 4x + e^{3x}.$$

5. Из кутије у којој се налази b ($b \geqslant 2$) белих и c ($c \geqslant 2$) црвених куглица на случајан начин извлачимо a ($2 \leqslant a \leqslant b + c$) куглице. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице беле боје, уколико куглице извлачимо

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/19

8. фебруар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла чије су странице одређене правим линијама

$$x - y = 0, \quad 2x - y = 0, \quad x - y = 4 \quad \text{и} \quad 2x - y = 4.$$

3. Одредити опште решење диференцијалну једначину

$$y + x^2 \sin x = xy'.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2x^2y^2.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/23

8. фебруар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-4)^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y + x = 2$, $y + x = 6$, $3y - x = -2$ и $x - 3y = 6$.

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3xy + 2 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 32.$$

5. Одредити све могуће релације еквиваленције над четворочланим скупом $S = \{1,2,3,4\}$. Колико их укупно има?

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $13/\xi$

11. фебруар 2016.

1. *Теоријско питање:* Релација еквиваленције и релација поретка.

Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2y + y = xy^2 + x$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције бројева 7 и $\frac{2}{7}$.

2. *Теоријско питање:* Извод сложене функције.
Задатак: Одредити први извод функције

$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}.$$

3. *Теоријско питање:* Бернулијева диференцијална једначина.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2y' + y^3x = y.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену.* Рад овог задатка може обезбедити само најнижу коначну прелазну оцену.

Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-4)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $13/\pi$

11. фебруар 2016.

1. *Теоријско питање:* Конвергенција редова са позитивним члановима.
Задатак: Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Променити поредак интеграције код двојног интеграла

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{e^x}^{e} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену.* Рад овог задатка може обезбедити само најнижу коначну прелазну оцену.
Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^x + 2)(e^{2x} + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/17

18. јануар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + 2x\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{x+4}{x^4 + 9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције

$$z(x,y) = xy \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & (a+1)z & = & 2 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & a \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Користећи Лагранжову (J. L. Lagrange) теорему доказати да за сваки $x \in [0, +\infty)$ важи следећа неједнакост

$$\ln(x+1) \leqslant x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/29

18. јануар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = -4x\sqrt{1-x^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int x e^x \sin x \,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$xy' = y + x(1 + e^{-y/x}).$$

5. Одредити граничну вредност низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/23

18. јануар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстреме функције

$$z(x,y) = x + 2y \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 5.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y' = \sin x + e^{-x}.$$

5. Одредити број линеарно независних колона матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 6 & 14 & 8 & 22 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 16/19

18. јануар 2016.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^5 - 8}{x^4}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 108\ln x - xy^2 + \frac{y^3}{3}\,.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y' = \sin x + e^{-x}.$$

5. Одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $13/\varepsilon$

22. јануар 2016.

1. *Теоријско питање:* Аритметичке особине конвергентних низова.
Задатак: Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

2. *Теоријско питање:* Основне теореме диференцијалног рачуна – Фермаова, Ролова, Лагранжова и Кошијева теорема (Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy).
Задатак: Показати да једначина $x^5+x^3+5x=0$ има само један и то једноструки реалан корен.

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2+3y^2=6$ у IV квадранту.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену.* Рад овог задатка може обезбедити само најнижу коначну прелазну оцену.

Бацају се два новчића четири пута.

а) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања падне иста страна на оба новчића.

б) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања на новчићима падне различита страна.

в) Одредити вероватноћу догађаја да у једном бацању на новчићима падну исте, а у преостала три бацања различите стране.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $13/\zeta$

23. јануар 2016.

1. *Теоријско питање:* Број e.

Задатак: Израчунати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}.$$

2. *Теоријско питање:* Бесконачно мале и бесконачно велике величине.
Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана на скупу бесконачно малих величина у околини неке тачке $a(\in\mathbb{R})$ као

$$f(x)\,\varrho\,g(x) \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

једна релација еквиваленције.

3. *Теоријско питање:* Хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.
Задатак: Поставити диференцијалну једначину чије ће опште решење гласити

$$y(x)=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену.* Рад овог задатка може обезбедити само најнижу коначну прелазну оцену.
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y)=e^{y-x}(y^2-2x^2).$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/19

20. септембар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 6x + 8}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Наћи локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^3 - 6xy + y^2 + 16.$$

4. Зависно од вредности реалних параметра a и b дискутовати и решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & + & 22y & + & 3z & - & 6u & = & 6 \\ x & + & 5y & + & z & - & 2u & = & 3 \\ 6x & - & 2y & + & az & - & 2u & = & b+2. \end{array}$$

5. Одредити функцију акумулације и стопе раста акумулације у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/21

20. септембар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x - x\ln x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int e^{5x} \cos 6x \,\mathrm{d}x\,.$$

3. Наћи локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^2 + y^3 - xy - x.$$

4. Зависно од вредности реалних параметра a и b дискутовати и решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -2x & + & (a+2)y & - & 2z & = & -2 \\ x & + & (a-4)y & + & (a+12)z & = & b. \end{array}$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/17

септембар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2x}{1 - \ln x}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y + x = 2$, $y + x = 6$, $3y - x = -2$ и $x - 3y = 6$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (y - x)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

4. Решити матричну једначину $12(X - 3E)^{-1} = AM$, ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Одредити функцију акумулације и стопе раста акумулације у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/09

8. јун 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 .$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4} .$$

3. Решити диференцијалну једначину:

$$y' = 2y^2 + 12y + 22 + (x^2-3x)y'.$$

4. У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/15

8. јун 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(\ln^2 x - \ln x + 1) .$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \frac{y}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена правама $y=0$, $y=1$, $x=0$ и $x=1$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{294}{x} + \frac{252}{y} .$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције $f(x) = \sqrt{x}$, за $x \geqslant 0$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/05

9. фебруар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{9x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{x^4 - x^3 + x^2 - x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 108\ln x - xy^2 + \frac{y^3}{3}\,.$$

4. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати особине линеарног уређења релације ϱ ако $x, y \in (1, +\infty)$.

5. Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/08

9. фебруар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 6y - 5$ у II квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}\,.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 4x + e^{3x}.$$

5. Одредити асимптоте функције

$$f(x) = x + 2\,\mathrm{arctg}\,x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/27

9. фебруар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln \frac{x^3}{x^2 - 1}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у IV квадранту.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 16y = \sin 4x + 4x.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & az & = & 1 \\ ax & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{уз услов} \quad 2x^2 + 2y^2 = x^2 y^2.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/29

9. фебруар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 45 = 14x$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(12 - x - y).$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 4x + e^{3x}.$$

5. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} k \cdot x & + & 5y & + & 13z & = & 0 \\ -x & + & 7y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & (k+6)z & = & 0. \end{array}$$

у зависности од реалног параметра k.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $15/2\alpha$

14. фебруар 2015.

1. *Теоријско питање:* Лема о два полицајца у теорији низова и у теорији реалних функција једног аргумента.
Задатак: Одредити граничну вредност низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

3. *Теоријско питање:* Метрички простор (дефиниција и примери).
Задатак: Како се дефинише метрика у тродимензионалном еуклидском простору?
Доказати да је тродимензионални еуклидски простор један метрички простор.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Испитати да ли функција $z(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ задовољава услов

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $15/2\beta$

14. фебруар 2015.

1. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $y = \operatorname{arctg} 2x$ Маклореновим полиномом трећег степена.

3. *Теоријско питање:* Прираштај функције два аргумента (дефиниција).
Задатак: Одредити прираштаје функције $f(x,y) = x + 2ye^{x^2-y^2}$ за прираштаје аргумената Δx и Δy.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3-2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/10

26. јануар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-1/x}\,.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{x-e^x}$ и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}\,.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/11

26. јануар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла чије су странице одређене правим линијама

$$x = y, \quad 2x - y = 0, \quad x - y = 4 \quad \text{и} \quad 2x - y = 4.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Проверити апроксимативну формулу

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}\,x^3.$$

5. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/23

26. јануар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x(1 - \ln x)}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у IV квадранту.

3. Решити диференцијалну једначину

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = 2x^2y + 3xy - 4y.$$

4. Зависно од вредности реалних параметра a и b дискутовати и решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 7z & + & 3u & = & 0 \\ -2x & + & (a+2)y & - & 12z & + & (a-6)u & = & 3 \\ 5x & - & (a+8)y & + & (b+33)z & + & (16-a)u & = & 2. \end{array}$$

5. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати да ли је ова релација једна релација поретка на скупу **а)** $\mathbb{R}$ и **б)** $(1, +\infty)$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/24

26. јануар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{1 + 3x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2 + 2x - 3}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x.$$

4. Решити матричну једначину $K + 3X = XAB$, при чему је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = A' \qquad \text{и} \qquad K = 21 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Апроксимирати функцију $f(x) = \cos^3 x$ Маклореновим полиномом четвртог степена.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/12

26. јануар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{4-x}}\,.$$

2. Израчунати површину ограничену кривом

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^3-1}$$

и x-осом на интервалу $[-1, \frac{1}{2}]$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2+y^2 = 2.$$

4. Испитати да ли функција $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ задовољава услов

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\,.$$

5. Користећи Тејлорову (енг. Taylor) формулу развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима бинома $x-2$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 15/22

26. јануар 2015.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{1+3x}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 4y' + 4y = (1-x)e^{2x}.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & (p+7)y & - & 6z & = & 1 \\ -x & + & (p-2)y & + & (p-1)z & = & q+3 \end{array}$$

у зависности од реалних параметара p и q.

5. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати особине линеарног уређења релације ϱ ако $x, y \in (1, +\infty)$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $13/\eta$

31. јануар 2015.

1. *Теоријско питање:* Релације и функције.

Задатак: Одредити најмању вредност реалног параметра a и одговарајућу вредност реалног параметра b тако да функција $f\colon [a,2] \to [0,b]$, задата са $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ буде бијекција, а затим одредити $f^{-1}(x)$.

2. *Теоријско питање:* Геометријска интерпретација првог извода.

Задатак: Одредити једначине тангенти криве линије $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ у њеним пресечним тачкама са хиперболом $y = \dfrac{1}{x+1}$.

3. *Теоријско питање:* Номинална и ефективна интересна стопа (дефиниција, међусобни односи и основне особине).

Задатак: Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:

Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = y - x + 4 \quad \text{уз услов} \quad xy^2 - x^2y = -2.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $13/\theta$

31. јануар 2015.

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.

Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Монотоност реалних функција (дефиниција и основне особине).

Задатак: Одредити интервале монотоности функције

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције два аргумента.

Задатак: Апроксимирати функцију $z(x,y) = e^{3x} \operatorname{arctg} 2y$ Маклореновим полиномом трећег степена.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:

Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 17y' + 72y = e^{-9x} - 8x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 333

11. октобар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост круга $\quad x^2 + y^2 \leqslant 2$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

4. Апроксимирати функцију $g(x) = \cos(\sin x)$ Маклореновим полиномом степена 4, а затим израчунати

$$\lim_{x \to 0} \frac{24 + 2x^3 + 5x^4 - 24g(x)}{7x^2 + 2x^3}\,.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^n - y^n \geqslant 0$$

релација поретка на скупу $\mathbb{R}$ реалних бројева **а)** за $n = 3$; **б)** за $n = 4$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Монотоност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале монотоности функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Функција акумулације и функција стопе раста акумлације (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити функцију акумулације и стопе раста акумулације у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
У рулету, у једној игри, куглица се може зауставити на једном од поља означеним бројевима од 0 до 36. Посматрамо резултат 13 одређених игара. Колика је вероватноћа случајног догађаја да да се у посматраним играма куглица заустави:

A – редом на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

B – на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

C – сваки пут на истом броју;

D – сваки пут на броју 3?

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

11. октобар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 2x}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^x \sin 4x \,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' = x + \sin 2x.$$

4. Апроксимирати функцију $g(x) = \ln(\cos x + x \sin x)$ Маклореновим полиномом степена 4, а затим израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{4g(x) - 2x^2 + x^3}{3x^3 + 5x^4}\,.$$

5. Показати да је бинарна релација ϱ задата као

$$x\,\varrho\,y \overset{def}{\iff} x(y^2+1) \leqslant y(x^2+1)$$

једно уређење скупа $(1, +\infty)$, али не и скупа $\mathbb{R}$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

3. *Теоријско питање:* Номинална и ефективна интересна стопа (дефиниција, међусобни односи и основне особине).
Задатак: Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Апроксимирати функцију $z(x, y) = e^{3x} \operatorname{arctg} 2y$ Маклореновим полиномом трећег степена.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/23

22. септембар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{4x^2 + 13x + 10}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 12xy - x^3 - y^3.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & az & = & 1 \\ ax & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/24

22. септембар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла: $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$, $C(2, 0)$ и $D(-1, 1)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

5. Користећи Лему о два полицајца испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/22

29. август 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \arcsin^2 x \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 6xy - (3x+4y)(x+y-47)\,.$$

4. Решити матричну једначину $XA = AB$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} 28 & 40 & -7 \\ -9 & -11 & 3 \\ 27 & 22 & -15 \end{pmatrix}.$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко његовог прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 29°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/19

29. август 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 45 = 14x$ у IV квадранту.

3. Ако је $abc \neq 0$, зависно од осталих вредности реалних параметара a, b и c дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccc} ay & + & bx & = & c \\ cx & + & az & = & b \\ bz & + & cy & = & a. \end{array}$$

4. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{2}x^2 e^y - \frac{1}{3}x^3 - ye^{3y}\,.$$

5. Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/20

јул 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{3x}\,\mathrm{d}x}{e^x+2}\,.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

4. Решити матричну једначину $AX = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/21

јул 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{21x^2 - 80x + 48}{x^3 - 6x^2 + 8x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = 2x^2y + 3xy - 4y.$$

4. Решити матричну једначину $XA = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}\,.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\delta$

јул 2014.

1. *Теоријско питање:* Конвергенција редова са позитивним члановима.
Задатак: Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

2. *Теоријско питање:* Бесконачно мале и бесконачно велике величине.
Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана на скупу бесконачно малих величина у околини неке тачке $a(\in\mathbb{R})$ као

$$f(x)\ \varrho\ g(x) \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

једна релација еквиваленције.

3. *Теоријско питање:* Бајесова формула.
Задатак: У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Проверити апроксимативну формулу:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}\approx 2x+\frac{2}{3}x^3.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/16

јун 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - 4 - \sqrt{3x^2 + 6x - 24}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D област ограничена линијама $y + x^2 = 2$ и $y + 1 = 2x$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{48}{x} + \frac{36}{y}\,.$$

4. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \sin\frac{y}{x} \qquad \text{задовољава услов} \qquad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/17

јун 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 2x}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D област ограничена кривом $y - x^2 = -3$ и x–осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{252}{x} + \frac{294}{y}\,.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 4x + e^{3x}.$$

5. Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\mu$

јун 2014.

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Диференцијал реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28°$.

3. *Теоријско питање:* Линеарна диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2x(x^2 + y)\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/05

10. фебруар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} .$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8y - 12$ у I квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^3.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3 \ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/06

10. фебруар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} .$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D (x + 2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ако је област D ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

3. Да ли функција $f(x) = \sqrt{x-1}$ задовољава услове Лагранжове (J.L. Lagrange) теореме на интервалу $[2, 6]$? Уколико задовољава, одредити одговарајућу вредност за ξ.

4. Из кутије у којој се налази 7 белих, 8 црвених и 9 зелених куглица извучене су одједном 2 куглице. Испоставило се да су те 2 куглице различитих боја. Наћи вероватноћу догађаја A да је једна од њих бела и једна црвена и догађаја B да је једна од њих бела.

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/07

10. фебруар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln \frac{x^3}{x^2 - 1}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + x^2 + 2y \quad \text{уз услов} \quad x - y = 8.$$

4. Испитати да ли функција $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ задовољава услов

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\,.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/12

10. фебруар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln \frac{x^3}{x+1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{6x^2 - 2x - 2}{x^3 - x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 + y^3 - xy - x.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & u & = & 2 \\ ax & + & 3y & - & 2z & + & 3u & = & a \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 2u & = & a-4. \end{array}$$

5. Испитати диференцијабилност следеће функције

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1 \\ 2x - \operatorname{sgn} x, & |x| > 1. \end{cases}$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 14/01

20. јануар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^x+2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-4)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (g_n), дефинисан као:

$$g_1 = 1, \qquad g_{n+1} = g_n + \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 14/02

20. јануар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{4x}{4+x^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 + y^3 - xy - x.$$

4. Решити матричну једначину $XA = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 14/03

20. јануар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3 - 2}{x(x^2 + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 4y + 1.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} k \cdot x & + & 5y & + & 13z & = & 0 \\ -x & + & 7y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & (k+6)z & = & 2. \end{array}$$

у зависности од реалног параметра k.

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/03

20. јануар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{e^{-x} - e}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3 - 2}{x(x^2 + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x.$$

4. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати да ли је ова релација једна релација поретка на скупу **а)** $\mathbb{R}$ и **б)** $(1, +\infty)$.

5. Одредити функцију акумулације при константној стопи раста акумулације.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/04

20. јануар 2014.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2x+1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8y - 12$ у II квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}\,.$$

4. У кутији се налази 30 белих и 10 црвених куглица. Наћи вероватноћу да ће од 4 извучене куглице 2 бити беле и 2 црвене, уколико:

а) извлачимо 4 куглице из кутије, једну за другом, тако што сваки пут поново вратимо извучену куглицу у кутију, да би извлачење поновили из кутије са почетним бројем куглица;

б) извлачимо 4 куглице из кутије одједном.

5. Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\pi$

25. јануар 2014.

1. *Теоријско питање:* Детерминанте (дефиниција и основне особине).

Задатак: Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

2. *Теоријско питање:* Извод сложене функције.
Задатак: Одредити први извод функције

$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}.$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Променити поредак интеграције код двојног интеграла

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{e^x}^{e} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x - 6\sin x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\lambda$

25. јануар 2014.

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $y = \operatorname{arctg} 2x$ Маклореновим полиномом трећег степена.

3. *Теоријско питање:* Бернулијева диференцијална једначина.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2y' + y^3 x = y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Испитати да ли функција

$$z(x,y) = x \operatorname{arctg}(x^2 - y^2) \qquad \text{задовољава услов} \qquad xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 333

13. oktobar 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост круга $\quad x^2 + y^2 \leqslant 2$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}\,.$$

4. Апроксимирати функцију $g(x) = \cos(\sin x)$ Маклореновим полиномом степена 4, а затим израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{24 + 2x^3 + 5x^4 - 24g(x)}{7x^2 + 2x^3}\,.$$

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Диференцијал реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28°$.

3. *Теоријско питање:* Појам вероватноће (дефиниција и основне особине).
Задатак: У кутији се налази b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из кутије извлачимо једну белу куглицу, не враћајући је назад. Која је вероватноћа да ћемо извучећи још једну куглицу извући куглицу беле боје?
б) Из кутије извлачимо једну куглицу, не враћајући је назад, и не обраћамо пажњу на њену боју, а затим извлачимо једну куглицу која је беле боје. Која је вероватноћа да је прва куглица била такође бела?
ц) Из кутије извлачимо две куглице одједном. Која је вероватноћа да ће обе куглице бити беле боје?

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Користећи Лагранжову (J.L. Lagrange) теорему доказати неједначину:

$$|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

13. oktobar 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 2x}\,.$$

2. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \sin\frac{y}{x} \qquad \text{задовољава услов} \qquad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}\,.$$

4. Апроксимирати функцију $g(x) = \ln(\cos x + x\sin x)$ Маклореновим полиномом степена 4, а затим израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{4g(x) - 2x^2 + x^3}{3x^3 + 5x^4}\,.$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Ролова теорема (Rolle).
Задатак: Показати да једначина

$$x^5 + 3x - 11 = 0$$

има једно и само једно реално решење.

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа (дефиниција и основне особине).
Задатак: Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Користећи Лему о два полицајца испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\,.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/01

23. септембар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\arccos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана условом

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

на скупу $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ релација еквиваленције. Уколико јесте, одредити класу еквиваленције броја 3.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/02

23. септембар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y' = 2y^2 + 12y - 22 + (x^3 - 3x)y'.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{уз услов} \quad 18x^2 + 18y^2 = x^2y^2.$$

5. Одредити функцију акумулације у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/15

30. август 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 4}{(x-2)^2}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{2}y^2e^x - \frac{1}{3}y^3 - xe^{3x}.$$

4. Из кутије у којој се налази 8 белих и 9 црвених куглица једна куглица је изгубљена. Да бисмо, на основу експеримента, извели закључак о боји изгубљене куглице, извукли смо случајно одједном 3 куглице, и то 1 белу и 2 црвене. Наћи вероватноћу догађаја B да је изгубљена куглица беле боје и догађаја C да је изгубљена куглица црвене боје.

5. Зависно од вредности реалног параметра a одредити ранг матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -a & 3 \\ 1 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/18

30. август 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у IV квадранту.

3. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \sqrt{xy} \quad \text{уз услов} \quad 50\,000x + 0,08y = 1000\,000.$$

5. Испитати да ли је релација $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq A^2$ релација еквиваленције на скупу A, ако је релација $\varrho \subseteq A^2$ рефлексивна и транзитивна на датом скупу A.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/10

25. јун 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у IV квадранту.

3. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & ay & + & 3z & = & -2a \\ 2x & - & 2y & + & 6z & = & 4 \end{array}\,.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = y^2 - 2x^2 \quad \text{под условом} \quad y - 2x = 3.$$

5. Дате су функције $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисане као $f(x) = x^2 + 6x - 3$ и $g(x) = x^3 + 1$. Испитати да ли су то бијекције. Уколико нису одредити домен и кодомен функције која није бијекција тако да буде бијекција, а затим одредити и њихове одговарајуће инверзне функције.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/11

25. јун 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2).$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (y-x)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'x + y\ln x = y + y\ln y.$$

5. У рулету, у једној игри, куглица се може зауставити на једном од поља означеним бројевима од 0 до 36. Посматрамо резултат 13 одређених игара. Колика је вероватноћа случајног догађаја да да се у посматраним играма куглица заустави:

A – редом на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

B – на сваком од бројева од 1 до 13 по једном;

C – сваки пут на истом броју;

D – сваки пут на броју 3?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/13

6. јун 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int (x^3 + x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 4y' + 4y = (1-x)e^{2x}.$$

4. Решити матричну једначину:

$$XM = 3XB' + 6B, \quad \text{при чему је} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(транспоновану матрицу матрице B означавамо са B').

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана међу природним бројевима као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\ y = kx$$

релација поретка на скупу $\mathbb{N}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/14

6. јун 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 3x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int (5x^5 + x^2)\, e^{x^3}\, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right).$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана на скупу бесконачно малих величина у околини неке тачке $a (\in \mathbb{R})$ као

$$f(x) \,\varrho\, g(x) \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

једна релација еквиваленције.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/09

28. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 5e^x + 7)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост круга $\quad x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ (a+3)x & + & (a-3)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\quad.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(12 - x - y).$$

5. Одредити најмању вредност реалног параметра a и одговарајућу вредност реалног параметра b тако да функција $f\colon [a,2] \to [0,b]$, задата са $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ буде бијекција, а затим одредити $f^{-1}(x)$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/22

28. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2xy + y^2 \quad \text{уз услов} \quad y + 6 = x.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x.$$

5. Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 13/08

28. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln \frac{x}{x^2 - 1} \,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int_2^{e+1} x \ln(x-1) \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + x^2 \quad \text{уз услов} \quad y - x = 6.$$

4. Проверити апроксимативну формулу

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}\, x^3.$$

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/21

28. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{4x}{4 + x^2} \,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

где је D унутрашњост трапеза са теменима $A(-1,-1)$, $B(6,-1)$, $C(3,2)$ и $D(2,2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(12 - x - y).$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 4y' + 3y = (1-x)e^{2x}.$$

5. Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array} \,.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\zeta$

1. фебруар 2013.

1. *Теоријско питање:* Релација поретка и релација еквиваленције.
Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана међу природним бројевима као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\ y = kx$$

релација поретка на скупу $\mathbb{N}$.

2. *Теоријско питање:* Несвојствени интеграл (дефиниција и основне особине).
Пример: Одредити површину ограничену x-осом и луком криве

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа (дефиниција и основне особине).
Задатак: Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Решити матричну једначину:

$$2X + B = XA, \quad \text{ако је} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 2 & -15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 222

12. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у IV квадранту.

3. Решити диференцијалну једначину

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = 2x^2y + 3xy - 4y.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3az & = & 4 \\ 3x & - & 2y & + & 2az & = & 3a \\ 7x & - & 4y & + & 8az & = & 11 \end{array}.$$

5. Користећи Лагранжову (J.L. Lagrange) теорему доказати неједначину:

$$|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 333

12. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 19x + 34}{x + 1}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = (y - x)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 7x & + & a^2y & - & 5z & = & a \end{array}.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана на скупу бесконачно малих величина у околини неке тачке $a(\in \mathbb{R})$ као

$$f(x) \, \varrho \, g(x) \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

једна релација еквиваленције.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 444

12. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 45 = 14x$ у IV квадранту.

3. Решити диференцијалну једначину

$$(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2ax & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3ax & - & 2y & + & 2z & = & 3a \\ 7ax & - & 4y & + & 8z & = & 11 \end{array}.$$

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

12. јануар 2013.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $3x^2 + 2y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = (y - x)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 7x & - & 4y & + & a^2 z & = & a \end{array}.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\beta$

17. јануар 2013.

1. *Теоријско питање:* Број e.

Задатак: Израчунати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}.$$

2. *Теоријско питање:* Лопиталова теорема.

Задатак: Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Бајесова формула.

Задатак: У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:

Одредити број линеарно независних колона матрице

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 6 & 6\end{pmatrix}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\eta$

17. јануар 2013.

1. *Теоријско питање:* Конвергенција редова са позитивним члановима.

Задатак: Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7^n n!}{n^n}.$$

2. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалне функције једног аргумента.

Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2}$$

у тачки $x=3$.

3. *Теоријско питање:* Бајесова формула.

Задатак: У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:

Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла чије су странице одређене правим линијама

$$x=y,\quad 2x-y=0,\quad x-y=4\quad \text{и}\quad 2x-y=4.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\gamma/08$

17. јануар 2013.

1. *Теоријско питање:* Релација еквиваленције и релација поретка.

Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x^2y + y = xy^2 + x$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције бројева 7 и $\frac{2}{7}$.

2. *Теоријско питање:* Основна тврђења о граничној вредности реалне функције једног аргумента.
Задатак: Израчунати следећу граничну вредност

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Локалне екстремне вредности реалне функције са два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 + 6xy + 2y^3.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Решити матричну једначину:

$$AX = X + A, \quad \text{где је} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\theta$

17. јануар 2013.

1. *Теоријско питање:* Гранична вредност низа.
Задатак: Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,).$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

3. *Теоријско питање:* Хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.
Задатак: Поставити диференцијалну једначину чије ће опште решење гласити

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2x^3 - 21x^2 + 72x + 2y^3 - 9y^2 + 12y + 1.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/14

октобар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2y \quad \text{уз услов} \quad x^2 + 4y^2 = 8.$$

4. Одредити све матрице X које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Користећи Лагранжову теорему (J.L. Lagrange) доказати да за сваки $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ важи следећа неједнакост

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/14

октобар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{\ln(x-2)}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Да ли функција $f(x) = \sqrt{x-1}$ задовољава услове Лагранжове (J.L. Lagrange) теореме на интервалу $[2, 6]$? Уколико задовољава, одредити одговарајућу вредност за ξ.

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{уз услов} \quad 2x^2 + 2y^2 = x^2y^2.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана условом

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ релација еквиваленције. Уколико јесте, одредити класу еквиваленције броја 3.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/13

септембар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}} \qquad \text{задовољава услов} \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right).$$

5. Користећи Лагранжову (J. L. Lagrange) теорему доказати да за сваки $x \in [0, +\infty)$ важи следећа неједнакост

$$\ln(x+1) \leqslant x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/06

септембар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{36}{x} + \frac{48}{y}.$$

4. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & a-4 \\ 3x & + & a\cdot y & - & 5z & & & = & -5. \end{array}$$

у зависности од вредности реалног параметра a.

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/06

04. фебруар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{36}{x} + \frac{48}{y}\,.$$

4. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & a-4 \\ 3x & + & a\cdot y & - & 5z & & & = & -5. \end{array}$$

у зависности од вредности реалног параметра a.

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/02

04. фебруар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 4}{(x-2)^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}\, e^x\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1 \end{array}.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x^2y + y^3 - 36x - 39y + 26.$$

5. Користећи Тејлорову (енг. Taylor) формулу развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима бинома $x - 2$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/14

04. фебруар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{\ln(x-2)}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Да ли функција $f(x) = \sqrt{x-1}$ задовољава услове Лагранжове (J.L. Lagrange) теореме на интервалу $[2,6]$? Уколико задовољава, одредити одговарајућу вредност за ξ.

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{уз услов} \quad 2x^2 + 2y^2 = x^2y^2.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана условом

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

на скупу $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ релација еквиваленције. Уколико јесте, одредити класу еквиваленције броја 3.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/19

04. фебруар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у I квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2x^2y^2.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x.$$

5. Испитати конвергенцију реда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/07

21. јануар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{4(2-x)^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int (x^3 + x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' = x + e^{7x}.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2xy + 4x + 2 \quad \text{уз услов} \quad x - y = 4.$$

5. Користећи неједнакост

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|,$$

која важи за сваки $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, и Лему о два полицајца, а без примене Лопиталове теореме, доказати да важи:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/11

21. јануар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D унутрашњост троугла са теменима $A(1,2)$, $B(2,-1)$ и $C(4,4)$.

3. У кутији се налази 30 белих и 10 црвених куглица.

а) Извлачимо 4 куглице из кутије, једну за другом, тако што сваки пут поново вратимо извучену куглицу у кутију, да би извлачење поновили из кутије са почетним бројем куглица;

б) извлачимо 4 куглице из кутије одједном.

Наћи вероватноћу да ће од 4 извучене куглице 2 бити беле и 2 црвене.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y' = \sin x + e^{-x}.$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 29°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/15

21. јануар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{x-e^x}.$$

2. Израчунати површину коју график горње функције ограничава са x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2y - 3 \quad \text{уз услов} \quad xy^2 = 1.$$

4. Ако је $abc \neq 0$, зависно од осталих вредности реалних параметара a, b и c дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccc} ay & + & bx & = & c \\ cx & + & az & = & b \\ bz & + & cy & = & a. \end{array}$$

5. Користећи неједнакост

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|,$$

која важи за сваки $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, и Лему о два полицајца, а без примене Лопиталове теореме, доказати да важи:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/21

21. јануар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 3x + e^{4x}.$$

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/23

21. јануар 2012.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{3x}\,\mathrm{d}x}{e^x+2}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}\,.$$

4. Проверити апроксимативну формулу

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}\,x^3.$$

5. Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Усмени испит из математике

Ознака задатка: 09/β

25. јануар 2012.

1. *Теоријско питање:* Број e.

Задатак: Израчунати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}.$$

2. *Теоријско питање:* Лопиталова теорема.
Задатак: Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Бајесова формула.
Задатак: У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити број линеарно независних колона матрице

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\-1&2&2&1\\4&8&6&6\end{pmatrix}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: 11/δ

25. јануар 2012.

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}2x&-&y&+&z&+&u&=&1\\x&+&2y&-&z&+&4u&=&2\\x&+&7y&-&4z&+&11u&=&a\end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Основна тврђења о граничној вредности реалне функције једног аргумента.
Задатак: Израчунати следећу граничну вредност

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Променити поредак интеграције код двојног интеграла

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{e^x}^{e} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y)=2x^3+6xy+y^2.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

24. децембар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x - 9}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 5 = 6x$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{xy}{x + y} \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2x^2y^2.$$

4. У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

5. Користећи Лему о два полицајца испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

22. oктобар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (y-x)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати да ли је ова релација једна релација поретка на скупу **а)** $\mathbb{R}$ и **б)** $(1, +\infty)$.

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Геометријска интерпретација првог извода.
Задатак: Одредити једначине тангенти криве линије $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ у њеним пресечним тачкама са хиперболом $y = \dfrac{1}{x+1}$.

3. *Теоријско питање:* Појам вероватноће (дефиниција и основне особине).
Задатак: У кутији се налази b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из кутије извлачимо једну белу куглицу, не враћајући је назад. Која је вероватноћа да ћемо извучећи још једну куглицу извући куглицу беле боје?
б) Из кутије извлачимо једну куглицу, не враћајући је назад, и не обраћамо пажњу на њену боју, а затим извлачимо једну куглицу која је беле боје. Која је вероватноћа да је прва куглица била такође бела?
ц) Из кутије извлачимо две куглице одједном. Која је вероватноћа да ће обе куглице бити беле боје?

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Користећи Лагранжову (J.L. Lagrange) теорему доказати неједначину:

$$|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/15

октобар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 6xy - (3x+4y)(x+y-47)\,.$$

4. У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

5. Користећи Лагранжову (J.L. Lagrange) теорему доказати неједначину:

$$|\sin a - \sin b| \leqslant |a-b|.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\gamma$

13. октобар 2011.

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}\,.$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалних функција (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$z(x,y) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Линеарна диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2x(x^2+y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капитализацање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/10

септембар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (3x-1)e^{\frac{2}{x}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int (2x+1)e^{\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Из кутије у којој се налази 8 црвених и 9 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

4. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \ln \frac{y}{x} \qquad \text{задовољава услов} \qquad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

5. Доказати да низ (g_n), дефинисан као:

$$g_1 = 1, \qquad g_{n+1} = g_n + \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/24

септембар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

5. Користећи Лагранжову (J. L. Lagrange) теорему доказати да за сваки $x \in [0, +\infty)$ важи следећа неједнакост

$$\ln(x+1) \leqslant x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/13

јул 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2,0)$, $B(1,-2)$, $C(2,0)$ и $D(1,2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = y^2 + x^2 \quad \text{уз услов} \quad 2x + 2y = 1.$$

4. Одредити све могуће релације еквиваленције над четворочланим скупом $S = \{1,2,3,4\}$. Колико их укупно има?

5. Испитати конвергенцију реда:

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 4} + \frac{6}{3\cdot 8} + \frac{24}{4\cdot 16} + \frac{120}{5\cdot 32} + \ldots$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/22

јул 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^7\,\mathrm{d}x}{x^4 - 1}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Користећи Лагранжову теорему (J.L. Lagrange) доказати да за сваки $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ важи следећа неједнакост

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/12

10. јун 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је област D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y - x = 3$, $y - x = 6$, $y + 2x = -12$ и $y + 2x = -6$.

3. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^n - y^n \geqslant 0$$

релација поретка на скупу $\mathbb{R}$ реалних бројева **а)** за $n = 3$; **б)** за $n = 4$.

4. Решити матричну једначину $AX = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Из кутије у којој се налази 7 црвених и 9 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/03

1. фебруар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3+2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{9x^3-6x^2+7x-4}{x^4-x^3+x^2-x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити матричну једначину:

$$AX = X + A, \quad \text{где је} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 6 - 5x - 4y \quad \text{уз услов} \quad x^2 - y^2 = 9.$$

5. Бацају се два новчића четири пута.

а) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања падне иста страна на оба новчића.

б) Одредити вероватноћу догађаја да у сва четири бацања на новчићима падне различита страна.

в) Одредити вероватноћу догађаја да у једном бацању на новчићима падну исте, а у преостала три бацања различите стране.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/04

1. фебруар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x^2-8)e^x.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^2-2x+2}{e^x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2x + y \quad \text{уз услов} \quad 4x^2 + y^2 = 8.$$

4. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати да ли је ова релација једна релација поретка на скупу **а)** $\mathbb{R}$ и **б)** $[1,+\infty)$.

5. Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/05

1. фебруар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{6x^2 - 2x - 2}{x^3 - x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 16y = e^{4x} + \cos 4x.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^3 - xy + y^2 - 11x + 3.$$

5. Испитати да ли из транзитивности релација ϱ и σ следи транзитивност релације $\varrho \cup \sigma$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/06

1. фебруар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x+3)e^{\frac{1}{x-3}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}\,.$$

3. Функцију

$$z = (2x - 3y)e^{2-x}$$

апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $M(2, -1)$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 4x + e^{3x}.$$

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\lambda$

05. фебруар 2011.

1. *Теоријско питање:* Крамерово правило.

Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ (a+3)x & + & (a-3)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

2. *Теоријско питање:* Диференцијабилност реалне функције једног аргумента.
Задатак: Испитати диференцијабилност следеће функције

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1 \\ 2x - \operatorname{sgn} x, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа.

Задатак: Из кутије у којој се налази 7 белих, 8 црвених и 9 зелених куглица извучене су одједном 2 куглице. Испоставило се да су те 2 куглице различитих боја. Наћи вероватноћу догађаја A да је једна од њих бела и једна црвена и догађаја B да је једна од њих бела.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 - xy + y^3 - 11y + 3.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\theta$

05. фебруар 2011.

1. *Теоријско питање:* Бинарне релације (основне особине).
Задатак: Да ли из транзитивности релација ϱ и σ следи транзитивност релације $\varrho \cup \sigma$? (Показати!)

2. *Теоријско питање:* Асимптоте реалне функције једног аргумента.
Задатак: Одредити асимптоте функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Линеарна диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Одредити опште решење диференцијалну једначину

$$y + x^2 \sin x = xy'.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Дата је функција $f(x) = x^{2(x-1)^x}$, за $x > 1$. Наћи $f'(x)$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/09

15. јануар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 6x - 5$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x \quad \text{уз услов} \quad x^2 + 2y^2 = 3.$$

4. Решити матричну једначину $XA = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/20

15. јануар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 4y' + 3y = \sin 3x + e^{3x}.$$

5. Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/18

15. јануар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8y - 12$ у I квадранту.

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y = \sin x.$$

4. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4)(x+7).$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/08

15. јануар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 5e^x + 7).$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост троугла са теменима $A(1,1)$, $B(2,-1)$ и $C(6,6)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x - y \quad \text{уз услов} \quad x^2 - y^2 = 2.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & a\cdot z & = & 1 \\ a\cdot x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Користећи Лему о два полицајца испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/17

15. јануар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у I квадранту.

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0.$$

4. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 3 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице плаве боје?

5. Одредити број линеарно независних колона матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 11/19

15. јануар 2011.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 4x - 5}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{3x}\,\mathrm{d}x}{e^x + 2}\,.$$

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 17y' + 72y = e^{8x} + 9x.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\pi$

22. јануар 2011.

1. *Теоријско питање:* Лема о два полицајца у теорији низова и у теорији реалних функција једног аргумента.
Задатак: Одредити граничну вредност низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

2. *Теоријско питање:* Основне теореме диференцијалног рачуна – Фермаова, Ролова, Лагранжова и Кошијева теорема (Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy).
Задатак: Показати да ако је $b > 3$, онда једначина $x^3 + 3x^2 + bx + 8 = 0$ има само један и то једноструки реалан корен.

3. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ задовољава услов

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити функцију акумулације при константној стопи раста акумулације.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\xi$

22. јануар 2011.

1. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Задатак: Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17).$$

3. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције два аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $z(x,y) = e^{3x} \operatorname{arctg} 2y$ Маклореновим полиномом трећег степена.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 3 куглице **а)** одједном; **б)** једну за другом са враћањем. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице плаве боје?

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $11/\mu$

23. јануар 2011.

1. *Теоријско питање:* Релација еквиваленције и релација поретка.
Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-y^2)(x^2y^2-1)=0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $y=\operatorname{arctg} 2x$ Маклореновим полиномом трећег степена.

3. *Теоријско питање:* Номинална и ефективна интересна стопа (дефиниција, међусобни односи и основне особине).
Задатак: Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати површину ограничену луком криве

$$\frac{(x-3)^2}{x^2-10x+16}$$

над интервалом $[3,4]$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 333

23. oktobar 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{x-e^x}\,.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције из претходног задатка и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}\,.$$

4. У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Задатак: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

2. *Теоријско питање:* Ролова теорема (Rolle).
Задатак: Одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Променити поредак интеграције код двојног интеграла

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{e^x}^{e} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2xy + y^2 \quad \text{уз услов} \quad y + 3 = x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

23. oктобар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}.$$

2. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x+y)^3 \quad \text{уз услов} \quad x^2+y^2=8.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}.$$

4. Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Диференцијал реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28°$.

3. *Теоријско питање:* Везане локалне екстремне вредности реалне функције са два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2xy + y^2 - 1 \quad \text{уз услов} \quad y - x = -6.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Израчунати интеграл

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ако је област D ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/16

25. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{8x^2-12x+2}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x + xy + y'(y+xy) = 0.$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 29°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/16

25. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10).$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{21x^2-94x+72}{x^3-7x^2+12x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = \frac{xy}{2} + (47-x-y)\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right).$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'x + y\ln x = y + y\ln y.$$

5. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/17

25. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2+y^2=8x-12$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

4. Решити матричну једначину:

$$AX = X + A, \quad \text{где је} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Да ли функција $f(x)=\sqrt{x-1}$ задовољава услове Лагранжове (J.L. Lagrange) теореме на интервалу $[2,6]$? Уколико задовољава, одредити одговарајућу вредност за ξ.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\beta$

28. септембар 2010.

1. *Теоријско питање:* Функције (дефиниција и основне особине).
Задатак: Испитати да ли су функције $f(x)=x^2+x+1$ и $g(x)=x^3+1$ бијекције.

2. *Теоријско питање:* Основна тврђења о граничној вредности реалне функције једног аргумента.
Задатак: Израчунати следећу граничну вредност

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Диференцијабилност и тотални диференцијал реалне функције са два аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити тоталне диференцијале I и II реда функције $z(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$ у тачки $(1,2)$.

Следећи **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену*

Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' - y = 2x^2\sqrt{y}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/17

9. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y - x = 3$, $y - x = 6$, $y + 2x = -12$ и $y + 2x = -6$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x+y)^3 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 7y' + 12y = 3x + e^{4x}.$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 29°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/12

9. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у IV квадранту.

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad \text{уз услов} \quad 8x^2 + 8y^2 = x^2y^2.$$

5. Користећи Лему о два полицајца испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/18

9. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x^2 - 3}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x + \sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^4 + y^4 - 2y^2.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 4y' + 3y = \sin 3x + e^{3x}.$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/16

9. септембар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x - 2}{\ln^2(x-2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 2}{x(x^2+1)}\,dx.$$

3. Функцију

$$z = (2x - 3y)e^{2-x}$$

апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $M(2, -1)$.

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = e^{xy} \quad \text{уз услов} \quad x + y = 2.$$

5. Доказати да низ (g_n), дефинисан као:

$$g_1 = 2, \qquad g_{n+1} = g_n + \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\varepsilon$

11. септембар 2010.

1. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Задатак: Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Асимптоте функције.
Задатак: Одредити асимптоте функције

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x.$$

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа (дефиниција и основне особине).
Задатак: Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Следећи **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену*

Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = xy + \frac{252}{x} + \frac{294}{y}\,.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/10

9. јун 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}\,.$$

2. Израчунати површину области оивичене x-осом и кривом

$$f(x) = (x^2-8)e^x$$

у II и III квадранту.

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 2y' + y = (1+x)e^{-x}.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(12-x-y).$$

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/11

9. јун 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y+x=2$, $y+x=6$, $3y-x=-2$ и $x-3y=6$.

3. Наћи локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^3 - 6xy + y^2 + 16.$$

4. Одредити све матрице X које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/09

9. јун 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$I = \int \sqrt{\frac{1 - x}{x^4(1 + x)}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (y - x)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y' + y^2 = 0.$$

5. Користећи Лагранжову (J.L. Lagrange) теорему доказати неједначину:

$$|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/19

9. јун 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2).$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ и x-осом.

3. Наћи локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y' = \sin x + e^{-x}.$$

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\eta$

11. јун 2010.

1. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

2. *Теоријско питање:* Монотоност реалне функције једног аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале монотоности функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Нехомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.
Задатак: Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 9y = e^{3x} + 3x.$$

Следећи **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену*

Решити матричну једначину $AX = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/05

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{4x}{4+x^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2,0)$, $B(1,-2)$, $C(2,0)$ и $D(1,2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}\,.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & a\cdot z & = & 1 \\ a\cdot x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Из кутије у којој се налази 7 белих, 8 црвених и 9 зелених куглица извучене су одједном 2 куглице. Испоставило се да су те 2 куглице различитих боја. Наћи вероватноћу догађаја A да је једна од њих бела и једна црвена и догађаја B да је једна од њих бела.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/03

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост троугла са теменима $A(1,1)$, $B(2,-1)$ и $C(6,6)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2+y^2 = 2.$$

4. У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

5. Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/18

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int e^x \sin 4x \, \mathrm{d}x\,.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 4y' + 4y = (1-x)e^{2x}.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2).$$

5. Користећи Лему о два полицајца испитати конвергенцију низа

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/04

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln(x-1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y-x=3$, $y-x=6$, $y+2x=-12$ и $y+2x=-6$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2e^2y - e^x - e^{2y}.$$

4. Решити матричну једначину $XA = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/02

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-3)\ln^2(x-3)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2+y^2 = 2.$$

4. У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

5. Користећи Тејлорову (енг. Taylor) формулу развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима бинома $x-2$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/01

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}\,.$$

2. Израчунати површину коју график горње функције ограничава са x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

4. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати да ли је ова релација једна релација поретка на скупу **а)** $\mathbb{R}$ и **б)** $(1,+\infty)$.

5. Одредити асимптоте функције

$$f(x) = x + 2\,\mathrm{arctg}\,x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/19

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int e^{5x} \cos 6x \,\mathrm{d}x\,.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = 2x^2y + 3xy - 4y.$$

4. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \stackrel{\text{деф}}{\iff} \quad (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/20

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x.$$

4. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 3 куглице одједном. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице плаве боје?

5. Користећи Лагранжову теорему (J.L. Lagrange) доказати да за сваки $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ важи следећа неједнакост

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 10/20

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x^2 - 8)e^x\,.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{x-e^x}$ и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2y^3 - 21y^2 + 72y + 1.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right).$$

5. Одредити број линеарно независних колона матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/14

22. јануар 2010.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln(x-1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 17y' + 72y = e^{-8x} - 9x.$$

4. Проверити апроксимативну формулу

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}\,x^3.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана условом

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ релација еквиваленције. Уколико јесте, одредити класу еквиваленције броја 3.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\alpha$

28. јануар 2010.

1. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Користећи Тејлорову формулу разложити полином

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$$

по степенима бинома $x - 2$.

3. *Теоријско питање:* Реалне функције са два аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити и скицирати област дефинисаности функције

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2x - 3).$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је област D ограничена линијама $y + x^2 = 2$ и $y + 1 = 2x$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\varepsilon$

21. јануар 2009.

1. *Теоријско питање:* Матрични метод.
Задатак: Користећи матрични метод решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5}.$$

3. *Теоријско питање:* Бернулијева диференцијална једначина.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2y' + y^3 x = y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{1}{2}y^2 e^x - \frac{1}{3}y^3 - x e^{3x}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $10/\alpha$

29. јануар 2010.

1. *Теоријско питање:* Релација еквиваленције и релација поретка.
Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана међу целим бројевима као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\ y = kx$$

релација поретка на скупу $\mathbb{Z}$.

2. *Теоријско питање:* Гранична вредност функције (дефиниција и основне особине).
Задатак: Доказати да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ задовољава услов

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + \cos x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 333

24. oktobar 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције
$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2}\,.$$

2. Израчунати интеграл
$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:
$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:
$$y'' - 4y' + 3y = \sin 3x + e^{3x}.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је
$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Задатак: Одредити бар два базисна минора система једначина:
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}\,.$$

2. *Теоријско питање:* Конвексност реалних функција (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале конвексности функције
$$z(x,y) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Линеарна диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Решити диференцијалну једначину
$$2x(x^2+y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капитализање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

24. октобар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 13x + 22}{x - 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x, y) = 19y + 20x - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + \cos 3x.$$

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Ранг матрице (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Асимптоте функција.
Задатак: Одредити асимптоте функције

$$f(x) = 2x \operatorname{arctg} x.$$

3. *Теоријско питање:* Сложен интересни рачун.
Задатак: Одредити интересну стопу при којој капитал уз непрекидно капиталисање достиже исту вредност на крају једне године као при интересној стопи од 10% уз годишње капиталисање.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у IV квадранту.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/14

25. септембар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{3x}\,\mathrm{d}x}{e^x + 2}\,.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^2 + y^3 - xy - x.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/10

25. септембар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2}{(2 - x)^2} \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{1}{2} y^2 e^x - \frac{1}{3} y^3 - x e^{3x}.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right).$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/12

07. септембар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8y - 12$ у II квадранту.

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^3 - 6xy + y^2 + 16.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-7)y & + & z & = & 8 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\,.$$

5. Користећи Тејлорову (енг. Taylor) формулу развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима бинома $x - 2$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/13

07. септембар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}\,.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ и x-осом.

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}\,.$$

5. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/15

07. септембар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{21x^2-80x+48}{x^3-6x^2+8x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = \frac{xy}{2} + (47-x-y)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$$

4. Одредити све матрице X које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/24

07. септембар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x+y \quad \text{уз услов} \quad 9x^2+y^2=18.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y''-4y'+4y=(1-x)e^{2x}.$$

5. У првој кутији има b белих и c црвених куглица, у другој x белих и y црвених, док се у трећој кутији налазе само беле куглице. Случајно одабирамо кутију и из ње случајно извлачимо једну куглицу и то беле боје. Која је вероватноћа да смо куглицу извукли из прве, друге, односно треће кутије?

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\eta$

15. септембар 2009.

1. *Теоријско питање:* Кошијев и Даламберов критеријум конвергенције редова.

Задатак: Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n n!}{n^n}$.

2. *Теоријско питање:* Геометријска интерпретација првог извода.

Задатак: Одредити једначине тангенти криве линије $y = \frac{1}{x^2+1}$ у њеним пресечним тачкама са хиперболом $y = \frac{1}{x+1}$.

3. *Теоријско питање:* Нехомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.

Задатак: Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 9y = e^{3x} + 3x.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:

Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x + y \quad \text{уз услов} \quad 9x^2 + y^2 = 18.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/11

10. јун 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2x^2+3x-4}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x+2y \quad \text{уз услов} \quad x^2+4y^2=8.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & y & - & z & = & 7 \\ 2x & + & (a-1)y & + & (a-1)z & = & 14a \end{array}\,.$$

5. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/23

10. јун 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1}{e^x-1}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+4)}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}xy + \frac{y^2}{16} + \frac{x}{2} + \frac{y}{4}.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$(x^3-2x^2+x-2)y' = 2x^2y+3xy-4y.$$

5. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати да ли је ова релација једна релација поретка на скупу **а)** $\mathbb{R}$ и **б)** $(1,+\infty)$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\mu$

13. јун 2009.

1. *Теоријско питање:* Релација еквиваленције и релација поретка.
Задатак: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана условом

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+\frac{1}{y^2}$$

на скупу $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ релација еквиваленције. Уколико јесте, одредити класу еквиваленције броја 3.

2. *Теоријско питање:* Несвојствени интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Променити поредак интеграције код двојног интеграла

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{e^x}^{e} \mathrm{d}y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 7\\ x & + & y & - & z & = & 7\\ 2x & + & (a-1)y & + & (a-1)z & = & 14a \end{array}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\vartheta$

13. јун 2009.

1. *Теоријско питање:* Особине низова (монотоност, ограниченост, Болцано–Вајерштрасова теорема (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass).
Задатак: Доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1=2, \qquad e_{n+1}=e_n+\frac{1}{(n+1)!} \quad (n\in\mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Користећи Тејлорову формулу разложити полином

$$P(x)=2x^4-5x^3-3x^2+8x+4$$

по степенима бинома $x-2$.

3. *Теоријско питање:* Сложен интересни рачун.
Задатак: На колико нарасте улог од 25 000 динара за три године, ако је интересна стопа 6% и капиталисање **а)** годишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y)=x+4y \quad \text{уз услов} \quad x^2+16y^2=32.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/01

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 9y = \sin 3x + 3x.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/02

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y - x = 3$, $y - x = 6$, $y + 2x = -12$ и $y + 2x = -6$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 16y = \sin 4x + 4x.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2y + y = xy^2 + x$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције бројева 7 и $\frac{2}{7}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/03

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-2)^2(x+3)^3 .$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2,0)$, $B(1,-2)$, $C(2,0)$ и $D(1,2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2e^2y - e^x - e^{2y}.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 9y = e^{3x} + 3x.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/04

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{2x^2}{2x+1}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2 + 3y^2 = 6$ у III квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 16y = e^{4x} + 4x.$$

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/05

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-3)\ln^2(x-3)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{36}{x} + \frac{48}{y}\,.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' - y = 2x^2\sqrt{y}.$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/06

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln^2(x-1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост круга $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{252}{x} + \frac{294}{y}.$$

4. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачки $x = \pi$.

5. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 4 куглице

а) одједном;

б) једну за другом са враћањем.

Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 4 куглице исте боје и B – да извучемо бар 2 куглице плаве боје?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/07

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln(x-1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 5 = 6x$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{294}{x} + \frac{252}{y}.$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3az & = & 4 \\ 3x & - & 2y & + & 2az & = & 3a \\ 7x & - & 4y & + & 8az & = & 11 \end{array}.$$

5. Користећи Лему о 2 полицајца одредити граничну вредност низа

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 09/08

17. јануар 2009.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(6-x-y).$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2ax & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3ax & - & 2y & + & 2z & = & 3a \\ 7ax & - & 4y & + & 8z & = & 11 \end{array}.$$

5. Користећи Лагранжову (J. L. Lagrange) теорему доказати да за сваки $x \in [0, +\infty)$ важи следећа неједнакост

$$\ln(x+1) \leqslant x.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: 09/ε

21. јануар 2009.

1. *Теоријско питање:* Матрични метод.
Задатак: Користећи матрични метод решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5}.$$

3. *Теоријско питање:* Бернулијева диференцијална једначина.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2y' + y^3 x = y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{1}{2} y^2 e^x - \frac{1}{3} y^3 - x e^{3x}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: 09/α

22. јануар 2009.

1. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Користећи Тејлорову формулу разложити полином

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$$

по степенима бинома $x - 2$.

3. *Теоријско питање:* Реалне функције са два аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити и скицирати област дефинисаности функције

$$f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2x - 3).$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је област D ограничена линијама $y + x^2 = 2$ и $y + 1 = 2x$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\zeta$

23. јануар 2009.

1. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Задатак: Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Метода парцијалне интеграције.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \sin x \, e^x \, \mathrm{d}x \, .$$

3. *Теоријско питање:* Везане локалне екстремне вредности реалне функције са два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2xy + y^2 - 1 \quad \text{уз услов} \quad y - x = -6.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 7y' + 12y = e^{3x} + 4x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $09/\pi$

24. јануар 2009.

1. *Теоријско питање:* Линеарна зависност врста (колона) матрице и ранг матрице.
Задатак: Одредити број линеарно независних колона матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Интеграција неких ирационалних функција.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} \, \mathrm{d}x.$$

3. *Теоријско питање:* Диференцијабилност и тотални диференцијал реалне функције са два аргумента (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити тоталне диференцијале I и II реда функције $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ у тачки $(1,2)$.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост троугла са теменима $A(1,1)$, $B(2,-1)$ и $C(6,6)$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 222

18. октобар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 4y' + 3y = \sin 3x + e^{3x}.$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема.
Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Асимптоте функције.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(6-x-y).$$

3. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + x^2 + 2y \quad \text{уз услов} \quad x - y = 8.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 777

18. октобар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{x-e^x}.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{x-e^x}$ и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19y + 20x - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + \cos 3x.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

На полеђини овог листа налазе се и питања за усмени део испита. Писмени део испита је елиминаторан.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалне функције једног аргумента.
Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \sqrt{(x-7)^2}$$

у тачки $x = 7$.

2. *Теоријско питање:* Лопиталова теорема.
Задатак: Израчунати

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Релације и функције.
Задатак: Испитати да ли су функције $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ бијекције.

Овај **РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК** *радите* **само у случају да на горњим питањима и задацима нисте успели да обезбедите 51 поен** *неопходан за* **коначну** *прелазну оцену:*
Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 5 = 6x$ у IV квадранту.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/15

24. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 45 = 14x$ у IV квадранту.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' + y\sin x = \sin x.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 20% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/12

24. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^{3x}\,\mathrm{d}x}{e^x + 2}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{уз услов} \quad 18x^2 + 18y^2 = x^2y^2.$$

4. Из кутије у којој се налазе 4 беле, 6 плавих и 8 зелених куглица, случајно извлачимо 3 куглице. Одредити вероватноћу догађаја A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице различитих боја.

5. Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/17

24. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Наћи екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 + y^3 - xy - x.$$

4. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2} & \text{ако је } x \neq 0 \\ \pi & \text{ако је } x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$.

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/13

24. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-3)\ln^2(x-3)\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2 + 2x - 3}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'x + y\ln x = y + y\ln y.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Користећи Лагранжову (J. L. Lagrange) теорему доказати да за сваки $x \in [0, +\infty)$ важи следећа неједнакост

$$\ln(x+1) \leqslant x.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\gamma/08$

28. септембар 2008.

1. *Теоријско питање:* Основне особине реалних функција.
Задатак: Испитати да ли су функције

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{и} \qquad g(x) = x^3 + 1$$

бијекције.

2. *Теоријско питање:* Лопиталова теорема.
Задатак: Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Бајесова формула.
Задатак: У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у I квадранту.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/03

8. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{4x}{4+x^2}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D унутрашњост троугла са теменима $A(1,1)$, $B(2,-1)$ и $C(6,6)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{294}{x} + \frac{252}{y}.$$

4. Дата је бинарна релација ϱ као

$$x\,\varrho\,y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}\,.$$

Испитати које од особина линеарног уређења има ова релација скупу $\mathbb{R}$.

5. Користећи Тејлорову формулу развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима бинома $x-2$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/07

8. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-2)^2(x+3)^3\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је D област ограничена луком криве $2x^2+3y^2=6$ у III квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2e^2y - e^x - e^{2y}.$$

4. Решити матричну једначину $AX=B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Испитати да ли из транзитивности релација ϱ и σ следи транзитивност релације $\varrho\cup\sigma$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/02

8. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \arcsin^2 x \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy(6-x-y).$$

4. Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

5. Одредити асимптоте функције

$$f(x) = x + 2\,\mathrm{arctg}\,x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/06

8. септембар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2,0)$, $B(1,-2)$, $C(2,0)$ и $D(1,2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{36}{x} + \frac{48}{y}.$$

4. Одредити све могуће релације еквиваленције над четворочланим скупом $S = \{1,2,3,4\}$. Колико их укупно има?

5. Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}\,.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\mu/08$

13. септембар 2008.

1. *Теоријско питање:* Уређено поље реалних бројева.
Задатак: Одредити

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула.
Задатак: Користећи Тејлорову формулу разложити полином

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$$

по степенима бинома $x - 2$.

3. *Теоријско питање:* Прост интересни рачун.
Задатак: Цена хлеба је увећана за 150%. Да би коштао исто као и пре поскупљења, за колико процената треба умањити нову цену?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int \frac{21x^2 - 80x + 48}{x^3 - 6x^2 + 8x}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\chi/08$

13. септембар 2008.

1. *Теоријско питање:* Реалне функције (основне особине).
Задатак: Испитати монотоност и конвексност функције

$$f(x) = x^2 + 1,$$

користећи дефиницију.

2. *Теоријско питање:* Монотоност реалних функција (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити интервале монотоности функције

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Сложен интересни рачун.
Задатак: Одредити интересну стопу при којој капитал уз непрекидно капиталисање достиже исту вредност на крају једне године као при интересној стопи од 8% уз годишње капиталисање.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = xy + \frac{294}{x} + \frac{252}{y}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\theta/06$

13. септембар 2008.

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема.
Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-4)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

2. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{x^4(1+x)}}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. *Теоријско питање:* Кошијев и Даламберов критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n n!}{n^n}\,.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Испитати да ли су функције

$$f(x) = x^2 \qquad \text{и} \qquad g(x) = x^3$$

бијекције.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\delta/06$

13. септембар 2008.

1. *Теоријско питање:* Конвексност реалних функција једног аргумента.

Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 12x + 37).$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.
Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ задовољава услов

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Основне теореме диференцијалног рачуна – Ролова, Лагранжова и Кошијева теорема (Rolle, Lagrange, Cauchy).
Задатак: Показати да ако је $b > 3$, онда једначина $x^3 + 3x^2 + bx + 8 = 0$ има само један и то једноструки реалан корен.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/01

13. јун 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = xe^{1/x}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 17y' + 72y = e^{8x} + 9x.$$

4. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \sin\frac{y}{x} \qquad \text{задовољава услов} \qquad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

5. Користећи неједнакост

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|,$$

која важи за сваки $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, и Лему о два полицајца, а без примене Лопиталове теореме, доказати да важи:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/09

13. јун 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D унутрашњост троугла са теменима $A(1,0)$, $B(3,3)$ и $C(9,-3)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \land y \neq 0.$$

4. Одредити све матрице X које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/21

13. јун 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{x-e^x}.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{x-e^x}$ и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2y - 3 \quad \text{уз услов} \quad xy^2 = 1.$$

4. Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B.Bolzano; A.Cauchy) доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/22

13. јун 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}.$$

2. Израчунати површину оивичену графиком функције $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ и x-осом.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 y \quad \text{уз услов} \quad 2x + y = 3.$$

4. Доказати да за сваки $x \geqslant 1$ важи

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{x^2+1} = \pi.$$

5. Користећи Болцано–Вајерштрасову теорему (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass) доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\alpha/06$

17. јун 2008.

1. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалне функције једног аргумента.
Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \sqrt{(x-7)^2}$$

у тачки $x = 7$.

2. *Теоријско питање:* Несвојствени интеграл.
Задатак: Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа и независни догађаји.
Задатак: У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + x^2 + y^2 \quad \text{уз услов} \quad x + y = 4.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\beta/06$

17. јун 2008.

1. *Теоријско питање:* Диференцијалне једначине са раздвојеним промењљивим.

Задатак: Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0.$$

2. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа и независни догађаји.
Задатак: Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

3. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалних функција једног аргумента.
Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачки $x = \pi$.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-4)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/12

1. фебруар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 12x + 20}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8y - 12$ у I квадранту.

3. Одредити локалне екстреме функције

$$z(x, y) = x^2 + y^3 - xy - x.$$

4. Из кутије у којој се налази 8 белих и 9 црвених куглица једна куглица је изгубљена. Да бисмо, на основу експеримента, извели закључак о боји изгубљене куглице, извукли смо случајно одједном 3 куглице, и то 1 белу и 2 црвене. Наћи вероватноћу догађаја B да је изгубљена куглица беле боје и догађаја C да је изгубљена куглица црвене боје.

5. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ (a+3)x & + & (a-3)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/13

1. фебруар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (y - x)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

4. Одредити ефективну (годишњу) интересну стопу која одговара номиналној годишњој стопи од 40% уз капиталисање које је:

а) полугодишње; **б)** тромесечно; **ц)** непрекидно.

5. Користећи Маклоренову формулу проверити да ли важи:

$$\ln\frac{1 + x}{1 - x} \approx 2x + \frac{2}{3}x^3.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/12

1. фебруар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x-2}{\ln^2(x-2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 26y.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + \cos 3x.$$

5. Показати да је бинарна релација ϱ задата као

$$x\,\varrho\,y \overset{def}{\iff} x(y^2+1) \leqslant y(x^2+1)$$

једно уређење скупа $(1,+\infty)$, али не и скупа $\mathbb{R}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/04

1. фебруар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}\,.$$

2. Израчунати двојни интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D унутрашњост троугла са теменима $A(1,2)$, $B(2,-1)$ и $C(4,4)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + \frac{252}{x} + \frac{294}{y}.$$

4. У кутији се налазе две коцке. Једној су три поља означена бројем 1 и три преостала поља бројем 2, док су другој два поља означена бројем 1, а преостала четири поља бројем 2. Случајно извлачимо једну коцку и бацамо је. Појавио се број 1. Која је вероватноћа да смо извукли прву коцку?

5. Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачкама $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 08/05

1. фебруар 2008.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим $y - x = 3$, $y - x = 6$, $y + 2x = -12$ и $y + 2x = -6$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = xy + \frac{48}{x} + \frac{36}{y}.$$

4. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & a-4 \\ 3x & + & a\cdot y & - & 5z & & & = & -5. \end{array}$$

у зависности од вредности реалног параметра a.

5. У првој кутији је 5 белих и 10 црвених, а у другој 3 беле и 7 црвених куглица. Из друге кутије смо у прву пребацили једну куглицу, а затим смо из прве кутије извукли једну куглицу. Која је вероватноћа да смо извукли белу куглицу?

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\pi/07$

6. фебруар 2008.

1. *Теоријско питање:* Линеарна зависност врста (колона) матрице и ранг матрице.
Задатак: Одредити број линеарно независних врста матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.

Задатак: Користећи Тејлорову формулу разложити полином

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$$

по степенима бинома $x - 2$.

3. *Теоријско питање:* Линеарна диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$2x(x^2 + y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у IV квадранту.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\lambda/07$

6. фебруар 2008.

1. *Теоријско питање:* Непрекидност реалне функције једног аргумента на затвореном интервалу: Болцано–Кошијеве и Вајерштрасове теореме (B.Bolzano; A.Cauchy; K.W.T.Weierstass).
Задатак: Доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

2. *Теоријско питање:* Лопиталова теорема.

Задатак: Израчунати

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Везане локалне екстремне вредности реалне функције са два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 2xy + y^2 - 1 \quad \text{уз услов} \quad y - x = -6.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\zeta/08$

7. фебруар 2008.

1. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

2. *Теоријско питање:* Ролова, Лагранжова и Кошијева теорема.

Задатак: Показати да једначина

$$x^5 + 10x - 12 = 0$$

има једно и само једно реално решење.

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа (дефиниција и основне особине).
Задатак: Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 6xy + (4x + 3y)(47 - x - y).$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\sigma/08$

9. фебруар 2008.

1. *Теоријско питање:* Лема о два полицајца у теорији низова и у теорији реалних функција једног аргумента.

Задатак: Одредити граничну вредност низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

2. *Теоријско питање:* Одређени интеграл (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити по дефиницији вредност одређеног интеграла

$$\int_{-1}^{4} (1+x)\,\mathrm{d}x.$$

3. *Теоријско питање:* Бернулијева диференцијална једначина.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$y' + \tfrac{1}{2}xy^3 = \tfrac{1}{2}y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Испитати да ли функција $z(x, y) = \dfrac{x}{y}\, e^{x/y}$ задовољава услов

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\xi/08$

9. фебруар 2008.

1. *Теоријско питање:* Матрице (дефиниција и основне особине).
Задатак: Одредити све матрице које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента (Taylor, Maclaurin).

Задатак: Развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима од $x - 2$.

3. *Теоријско питање:* Хомогена диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Решити диференцијалну једначину

$$y'x + y\ln x = y + y\ln y.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (y-x)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/16

21. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + x - 2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8y - 12$ у II квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (x - y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

4. Функцију

$$z = (2x - 3y)e^{2-x}$$

апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $M(2, -1)$.

5. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} k \cdot x & + & 5y & + & 13z & = & 0 \\ -x & + & 7y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & + & 6y & + & (k+6)z & = & 0. \end{array}$$

у зависности од реалног параметра k.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/18

21. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (y - x)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' = e^x \cos 3x.$$

5. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & a \cdot z & = & 1 \\ a \cdot x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/19

21. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 6}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \arcsin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^2y + y - xy^2 - 4x}{xy} \quad \text{за} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' - y = 2x^2\sqrt{y}\,.$$

5. Решити матричну једначину $AX = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/10

4. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int e^{5x} \cos 6x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције

$$z(x, y) = x^3 - 6xy + y^2 + 16.$$

4. Из кутије у којој се налази 8 белих и 9 црвених куглица извлачимо 2 куглице. Одредити вероватноћу догађаја A да, извлачећи куглице одједном, извучемо 2 беле куглице; догађаја B да, извлачећи куглице одједном, извучемо 2 куглице различитих боја; као и догађаја C да, извлачећи куглице једну за другом, без враћања, извучемо другу куглицу беле боје.

5. Користећи Тејлорову формулу разложити полином

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$$

по степенима бинома $x - 2$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/15

4. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + x + 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\,,$$

где је D област ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у I квадранту.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (x - y)^3 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

4. Из кутије у којој се налази 7 белих, 8 црвених и 9 зелених куглица извучене су одједном 2 куглице. Испоставило се да су те 2 куглице различитих боја. Наћи вероватноћу догађаја A да је једна од њих бела и једна црвена и догађаја B да је једна од њих бела.

5. Користећи Лему о 2 полицајца одредити граничну вредност низа

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + n}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/09

4. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x - 4}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D (x + 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

где је D област ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 3x + y \quad \text{уз услов} \quad 9x^2 + y^2 = 18.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 16y = \sin 4x + 4x.$$

5. Користећи Ролову теорему (Rolle) одредити број реалних корена једначине $f'(x) = 0$ и интервал у којем се ти корени налазе, уколико је

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x+1)(x+4).$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/11

4. септембар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{21x^2 - 94x + 72}{x^3 - 7x^2 + 12x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 9y = \sin 3x + 3x.$$

5. Користећи Прву Болцано–Кошијеву теорему (B. Bolzano; A. Cauchy) доказати да једначина $x - 3\ln x = 0$ има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\gamma/06$

8. септембар 2007.

1. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x.$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.

Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ задовољава услов

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

3. *Теоријско питање:* Нехомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.
Задатак: Поставити диференцијалну једначину чије ће опште решење гласити

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+x^2.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2\\ (a+3)x & + & (a-3)y & + & z & = & 4\\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\varepsilon/06$

8. септембар 2007.

1. *Теоријско питање:* Кронекер-Капелијева теорема.
Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0\\ -x & + & y & + & 2z & = & 1\\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1. \end{array}$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.

Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ задовољава услов

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл.
Задатак: Променити поредак интеграције у интегралу

$$\int_1^2 \mathrm{d}y\int_{\ln y}^{e^y}\mathrm{d}x.$$

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/07

18. јануар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln^2(x-1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{21x^2 - 80x + 48}{x^3 - 6x^2 + 8x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције

$$z(x,y) = x^2 y \quad \text{уз услов} \quad 2x + y = 3.$$

4. Показати да је бинарна релација ϱ задата као

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x(y^2+1) \leqslant y(x^2+1)$$

једно уређење скупа $(1, +\infty)$, али не и скупа $\mathbb{R}$.

5. Гаусовом методом решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/09

18. јануар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \sin 2x\, e^{3x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Испитати да ли функција $\quad z = \dfrac{1}{x^2+y^2} \quad$ задовољава услов

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,.$$

5. Одредити све матрице које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/01

18. јануар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 4x + y \quad \text{уз услов} \quad 16x^2 + y^2 = 32.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y' - 12y = e^{3x} - 4x.$$

5. Проверити да ли функција $f(x) = \sqrt{x-1}$ задовољава услове теореме Лагранжа на интервалу $[2,6]$? Уколико задовољава, одредити одговарајућу вредност за ξ.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 07/05

18. јануар 2007.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 2x + 1 - \sqrt{3x^2 + 2x}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2x + 3y \quad \text{уз услов} \quad 4x^2 + 9y^2 = 72.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 16y = e^{4x} + 4x.$$

5. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x^2 y + y = xy^2 + x$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције бројева 7 и $\frac{2}{7}$.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\zeta/06$

24. јануар 2007.

1. *Теоријско питање:* Условни екстреми реалне функције два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 2xy + y^2 \quad \text{уз услов} \quad y + 3 = x.$$

2. *Теоријско питање:* Линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима.
Задатак: Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 17y' + 72y = e^{8x} + 9x.$$

3. *Теоријско питање:* Релације и функције.
Задатак: Испитати да ли су функције $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ бијекције.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи:

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\eta/07$

25. јануар 2007.

1. *Теоријско питање:* Аритметичке особине конвергентних низова.
Задатак: Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right).$$

2. *Теоријско питање:* Геометријска интерпретација првог извода.
Задатак: Одредити једначине тангенте и нормале криве $y = x^3 + 2x^2 - 1$ у њеној пресечној тачки са параболом $y = 2x^2$.

3. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције два аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $z(x, y) = e^{3x} \operatorname{arctg} 2y$ Маклореновим полиномом трећег степена.

Уколико нисте обезбедили 51 поен, неопходан за прелазну оцену, покушајте да решите следећи:

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Решити диференцијалну једначину:

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = 2x^2y + 3xy - 4y.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 111

21. октобар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19y + 20x - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + \cos 3x.$$

5. Показати да је бинарна релација ϱ задата као

$$x\,\varrho\,y \quad \text{акко} \quad x(y^2+1) \leqslant y(x^2+1)$$

једно уређење скупа $(1, +\infty)$, али не и скупа $\mathbb{R}$.

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема.
Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Несвојствени интеграл.
Задатак: Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + x^2 + 2y \quad \text{уз услов} \quad x - y = 8.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 222

21. oктобар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = (x-3)\ln^2(x-3).$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 4y' + 3y = \sin 3x + e^{3x}.$$

5. Ако је $abc \neq 0$, зависно од осталих вредности реалних параметара a, b и c дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccc} ay & + & bx & = & c \\ cx & + & az & = & b \\ bz & + & cy & = & a. \end{array}$$

Усмени испит из математике

1. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалне функције једног аргумента.
Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \sqrt{(x-7)^2}$$

у тачки $x = 7$.

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.
Задатак: Испитати да ли функција

$$z(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \sin\frac{y}{x} \qquad \text{задовољава услов} \qquad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

3. *Теоријско питање:* Релације и функције.
Задатак: Испитати да ли су функције $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ бијекције.

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:
Израчунати интеграл

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\;\mathrm{d}x.$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)
Ознака задатка: 09/2001
26. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 17y' + 72y = e^{-9x} - 8x.$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad \text{уз услов} \quad 8x^2 + 8y^2 = x^2y^2.$$

5. *Теоријско питање:* Реалне функције са два аргумента (дефиниција и основне особине).
Пример: Одредити и скицирати област дефинисаности функције

$$f(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2x - 3).$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)
Ознака задатка: 10/2001
26. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x-3)\ln^2(x-3).$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост круга $\quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$

3. Проверити апроксимативну формулу

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x + \frac{2}{3}\,x^3.$$

4. Одредити све матрице X које су комутативне са матрицом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. *Теоријско питање:* Несвојствени интеграл (дефиниција и основне особине).
Пример: Одредити површину ограничену x-осом и луком криве

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/03

26. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & a-4 \\ 3x & + & ay & - & 5z & & & = & -5 \end{array}$$

у зависности од вредности реалног параметра a.

5. Функцију $y = \operatorname{arctg} 2x$ апроксимирати Маклореновим полиномом трећег степена.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/04

26. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ако је област D ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 1.$$

4. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

5. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 3y = (1-x)e^{2x} + x$.

Усмени испит из математике

(старије генерације)
Ознака задатка: 32/03
29. септембар 2006.

1. Наћи инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + x^3 + x^2}.$$

3. *Теоријско питање:* Линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима.
Пример: Решити диференцијалну једначину

$$y'' - y = 3e^{2x}\cos x.$$

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:
Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: σ
29. септембар 2006.

1. *Теоријско питање:* Хомогена диференцијална једначина првог реда.
Задатак: Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right).$$

2. *Теоријско питање:* Локални екстреми реалних функција два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 26y.$$

3. *Теоријско питање:* Непрекидне функције (дефиниција и основне особине).
Задатак: Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x}, & x \neq 0 \\ \frac{2}{3}, & x = 0 \end{cases}.$$

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити једначине тангенте и нормале криве

$$\begin{aligned} x &= \ln(t^2+1) + 2t + 1 \\ y &= t^3 + 3t + 2 \end{aligned}$$

за вредност параметра $t = 0$.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 05/25

5. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' - 3y = e^x \cos 2x.$$

4. Функцију

$$z(x, y) = (2x - 3y)e^{2-x}$$

апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $M(2, -1)$.

5. *Теоријско питање:* Ранг матрице (дефиниција и основне особине).
Пример: Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 04/21

5. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{1/x} - x.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост паралелограма чије странице припадају правим:

$$y - x = 3, \quad y - x = 6, \quad y + 2x = -12 \quad \text{и} \quad y + 2x = -6.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 30y.$$

4. Из кутије у којој се налази 6 црвених и 8 плавих куглица на случајан начин извлачимо 3 куглице одједном. Колике су вероватноће догађаја: A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице плаве боје?

5. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема (Kronecker, Capelli).
Пример: Одредити параметар a тако да систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & a \end{array}$$

има решење.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/24

5. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int x \ln \frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

3. Испитати да ли функција $z(x,y) = x \operatorname{arctg}(x^2 - y^2)$ задовољава услов

$$\frac{1}{yz}\left(xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 - e^{-x}.$$

5. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x + y \quad \text{уз услов} \quad 9x^2 + y^2 = 18.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 04/22

5. септембар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^{x^2}}.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 + 5 = 6x$ у IV квадранту.

3. Одредити локалне екстреме функције

$$z(x,y) = \frac{xy}{4} + 2 \quad \text{уз услов} \quad x - 2y = 4.$$

4. Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

5. Поставити диференцијалну једначину чије ће опште решење гласити:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 05/19

10. јун 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x-2}{\ln^2(x-2)}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^{3x} \sin 4x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 1.$$

4. Решити диференцијалну једначину:

$$y'' - 4y' + 4y = (1-x)e^{2x}.$$

5. *Теоријско питање:* Аритметичке особине конвергентних низова (гранична вредност збира, производа,..., Лема о 2 полицајца,...).

Пример: Испитати конвергенцију низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 04/19

10. јун 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{2x^2}{2x+1}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Израчунати површину ограничену луком криве

$$\frac{(x-3)^2}{x^2-10x+16}$$

и x-осом на интервалу $[3,4]$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = \frac{xy}{2} + (47-x-y)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$$

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & ay & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & 2ay & + & 2z & = & 3a \\ 7x & - & 4ay & + & 8z & = & 11 \end{array}.$$

5. *Теоријско питање:* Основне теореме диференцијалног рачуна – Ролова, Лагранжова и Кошијева теорема (Rolle, Lagrange, Cauchy).

Пример: Показати да ако је $b > 3$, онда једначина $x^3 + 3x^2 + bx + 8 = 0$ има само један и то једноструки реалан корен.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/01

10. јун 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{21x^2 - 94x + 72}{x^3 - 7x^2 + 12x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = (x-y)^4 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28^\circ$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/02

10. јун 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 4.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 2.$$

4. Из кутије у којој се налазе 4 беле, 6 плавих и 8 зелених куглица, случајно извлачимо 3 куглице. Одредити вероватноћу догађаја A – да извучемо све 3 куглице исте боје и B – да извучемо 3 куглице различитих боја.

5. Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 7y' + 12y = 3x + e^{4x}.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\eta/06$

14. јун 2006.

1. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.
Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y) = y^{\frac{y}{x}} \sin\frac{y}{x}$ задовољава услов

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

3. *Теоријско питање:* Општи Кошијев (Cauchy) критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијског реда.
РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = xy + x^2 + 2y \quad \text{уз услов} \quad x - y = 8.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\delta/06$

15. јун 2006.

1. *Теоријско питање:* Конвексност реалних функција једног аргумента.
Задатак: Одредити интервале конвексности функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 12x + 37).$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.
Задатак: Испитати да ли функција $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$ задовољава услов

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. *Теоријско питање:* Основне теореме диференцијалног рачуна – Ролова, Лагранжова и Кошијева теорема (Rolle, Lagrange, Cauchy).
Задатак: Показати да ако је $b > 3$, онда једначина $x^3 + 3x^2 + bx + 8 = 0$ има само један и то једноструки реалан корен.
РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл:

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/19

1. фебруар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x-2}{\ln^2(x-2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^x \sin 4x \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = x + 4y \quad \text{уз услов} \quad x^2 + 16y^2 = 32.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

5. Доказати да низ $\{e_n\}$, дефинисан са

$$e_1 = 2, \quad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/23

1. фебруар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 4.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = 19y + 20x - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Решити диференцијалну једначину:

$$y'' + 2y' + y = (1+x)e^{-x}.$$

5. Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/17

1. фебруар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Решити матричну једначину $XA = AB$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} 28 & 40 & -7 \\ -9 & -11 & 3 \\ 27 & 22 & -15 \end{pmatrix}.$$

5. Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко његовог прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/22

1. фебруар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = (x-1)e^{1/(x-3)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{2x \operatorname{arctg} x^2}{1+x^4} \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 1.$$

4. Решити диференцијалну једначину:

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x} + 3x.$$

5. Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)
Ознака задатка: 04/20
1. фебруар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 4.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^{3x} \sin 2x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + 30x + 2y - 1.$$

4. Одредити једначине тангенте и нормале криве

$$\begin{aligned} x &= \ln(t^2 + 1) + 2t + 1 \\ y &= t^3 + 3t + 2 \end{aligned}$$

за вредност параметра $t = 0$.

5. *Теоријско питање:* Сложен интересни рачун.
Пример: На колико нарасте улог од 25 000 динара за три године, ако је интересна стопа 6% (pa)d и капитализање годишње?

Писмени испит из математике

(старије генерације)
Ознака задатка: 05/12
1. фебруар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x - 2}{\ln^2(x - 2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2, 0)$, $B(1, -2)$, $C(2, 0)$, $D(1, 2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 26y.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' + 16y = 2e^{4x} + 3\cos 4x.$$

5. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Пример: Показати да за било које регуларне матрице A и B важи

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\varepsilon/06$

7. фебруар 2006.

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема.
Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1 \end{array}.$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.
Задатак: Испитати да ли функција

$$z(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{задовољава услов} \quad y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

3. *Теоријско питање:* Двојни интеграл.
Задатак: Променити поредак интеграције у интегралу

$$\int_1^2 \mathrm{d}y \int_{\ln y}^{e^y} \mathrm{d}x.$$

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Израчунати интеграл

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\omega/06$

7. фебруар 2006.

1. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула за реалне функције једног аргумента.
Задатак: Апроксимирати функцију $f(x)=\sqrt{1+x}$ полиномом четвртог степена у околини тачке $x=0$.

2. *Теоријско питање:* Условни екстреми реалне функције два аргумента.
Задатак: Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y)=x+2y \quad \text{уз услов} \quad x^2+4y^2=8.$$

3. *Теоријско питање:* Лема о два полицајца у теорији низова и у теорији реалних функција једног аргумента.
Задатак: Одредити граничну вредност низа:

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}.$$

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити све могуће релације еквиваленције над четворочланим скупом $S=\{1,2,3,4\}$. Колико их укупно има?

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\beta/06$

8. фебруар 2006.

1. *Теоријско питање:* Диференцијалне једначине са раздвојеним променљивим.
Задатак: Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0.$$

2. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа и независни догађаји.
Задатак: Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцкице три пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од добијених коцкица и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја A да је бачена коцкица пала на обојену страну.

3. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалних функција.
Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у т. $x = \pi$.

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:

Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-4)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 05/20

8. фебруар 2006.

1. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Лема о два полицајца у теорији низова и у теорији реалних функција једног аргумента.
Пример: Одредити граничну вредност низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:

Решити матричну једначину $AX = B$, ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/13

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{\ln(x+3)}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 26x + 2y.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' + 16y = 2e^{4x} + 3\cos 4x.$$

5. Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/15

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2).$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - x^2}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 2x + 3y \quad \text{уз услов} \quad 4x^2 + 9y^2 = 72.$$

4. Решити матричну једначину:

$$AX = X + A, \quad \text{где је} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Доказати неједначину:

$$|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/14

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла чије су странице одређене правим линијама

$$x = y, \quad 2x - y = 0, \quad x - y = 4 \quad \text{и} \quad 2x - y = 4.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 2x + y \quad \text{уз услов} \quad 4x^2 + y^2 = 8.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 - e^{-x}.$$

5. Испитати конвергенцију редова:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/16

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & az & = & 1 \\ ax & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Доказати да једначина

$$x - 3\ln x = 0$$

има бар једно решење на интервалу $[1, e]$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/20

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 1.$$

4. Одредити све могуће релације еквиваленције над четворочланим скупом $S = \{1,2,3,4\}$. Колико их укупно има?

5. Одредити број линеарно независних врста матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 06/21

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^{5x} \cos 6x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстреме функције:

$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 0 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Одредити асимптоте функције:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-3)^2}.$$

Писмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 04/15

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{21x^2 - 94x + 72}{x^3 - 7x^2 + 12x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Ако је $abc \neq 0$, зависно од осталих вредности реалних параметара a, b и c дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{array}{ccccc} ay & + & bx & = & c \\ cx & + & az & = & b \\ bz & + & cy & = & a. \end{array}$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 4y' + 3y = \sin 3x + e^{3x}.$$

5. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалних функција са једним аргументом.
Пример: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = |\sin x|$$

у тачки $x = \pi$.

Писмени испит из математике

(старије генерације)

Ознака задатка: 05/14

15. јануар 2006.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{\ln(x+3)}\,.$$

2. Израчунати несвојствени интеграл:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 2x + y \quad \text{уз услов} \quad 4x^2 + y^2 = 8.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + \cos x.$$

5. *Теоријско питање:* Конвергенцију редова са позитивним члановима.
Пример: Испитати конвергенцију редова

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Усмени испит из математике

(старије генерације)
Ознака задатка: 05/24
20. јануар 2006.

1. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 8.$$

2. Решити диференцијалну једначину:

$$y' + y^2 = 0.$$

3. *Теоријско питање:* Релација еквиваленције и релација поретка.
Пример: Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:
Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & (a-3)y & + & z & = & 0 \\ -x & + & ay & - & z & = & 0 \\ ax & - & 4y & + & az & = & 0 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\gamma/06$
21. јануар 2006.

1. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x.$$

2. *Теоријско питање:* Парцијални изводи реалних функција два аргумента.
Задатак: Испитати да ли функција

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \quad \text{задовољава услов} \quad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3. *Теоријско питање:* Нехомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.
Задатак: Поставити диференцијалну једначину чије ће опште решење гласити

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + x^2.$$

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ (a+3)x & + & (a-3)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\alpha/06$

22. јануар 2006.

1. *Теоријско питање:* Непрекидност и диференцијабилност реалне функције једног аргумента.
Задатак: Испитати непрекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = \sqrt{(x-7)^2}$$

у тачки $x = 7$.

2. *Теоријско питање:* Несвојствени интеграл.
Задатак: Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}\,.$$

3. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа и независни догађаји.
Задатак: У првој кутији има b – белих и c црвених, а у другој x – белих и y – црвених куглица.
а) Из прве кутије пребацујемо једну куглицу у другу кутију, не обраћајући пажњу на њену боју. Након тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја A да је извучена куглица беле боје?
б) Претпостављајући да је $b \geqslant 3$ и $c \geqslant 3$, из прве кутије пребацујемо три куглице у другу кутију, не обраћајући пажњу на њихове боје. После тога, из друге кутије извлачимо једну куглицу. Колика је вероватноћа догађаја B да је извучена куглица беле боје?

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = xy + x^2 + y^2 \quad \text{уз услов} \quad x + y = 4.$$

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Усмени испит из математике

Ознака задатка: $\theta/06$

22. јануар 2006.

1. *Теоријско питање:* Кронекер–Капелијева теорема.
Задатак: Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & (a-4)y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\,.$$

2. *Теоријско питање:* Неодређени интеграл.
Задатак: Израчунати интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{x^4(1+x)}}\,\mathrm{d}x.$$

3. *Теоријско питање:* Кошијев и Даламберов критеријум конвергенције редова.
Задатак: Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot n!}{n^n}.$$

РЕЗЕРВНИ ЗАДАТАК:
Испитати да ли су функције $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ бијекције.

Сваки задатак (и резервни задатак) носи **20 поена**, док свако теоријско питање носи **33.33 поена**.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: I

22. октобар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x, y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Решити матричну једначину $XA = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. *Теоријско питање:* Непрекидност реалне функције једног аргумента на затвореном интервалу (Болцано–Кошијеве теореме (B. Bolzano; A. Cauchy) и Вајерштрасове теореме (K.W.T. Weierstrass)).
Пример: Доказати да једначина $x - 3\ln x = 0$ има бар једно реално решење на интервалу $[1, e]$.

Усмени испит из математике

1. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (y - x)^3 + 1$$

уз услов $x^2 + y^2 = 18$.

2. Израчунати интеграл

$$\iint_D (x + 2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

ако је област D ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

3. *Теоријско питање:* Лема о два полицајца у теорији низова и у теорији реалних функција једног аргумента.
Пример: Одредити граничну вредност низа:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:
Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' = e^x \cos 3x.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: II

22. октобар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 4\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - x^2}.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = xy(6 - x - y).$$

4. Решити матричну једначину $AX = B$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. *Теоријско питање:* Особине низова (монотоност, ограниченост, Болцано–Вајерштрасова теорема (B. Bolzano; K.W.T. Weierstrass)).
Пример: Доказати да низ (e_n), дефинисан као:

$$e_1 = 2, \qquad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Усмени испит из математике

1. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1$$

уз услов $x^2 + y^2 = 18$.

2. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

3. *Теоријско питање:* Хомогена диференцијална једначина другог реда саа константним коефицијентима.
Пример: Поставити диференцијалну једначину чије ће опште решење гласити:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

РЕЗЕРВНО ПИТАЊЕ:
Испитати да ли функција

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

задовољава услов

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/09

26. Септембар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \sin 2x e^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

задовољава услов

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

5. *Теоријско питање:* Реалне функције (основне особине).
Пример: Испитати монотоност и конвексност функције $f(x) = x^2 + 1$, користећи дефиницију.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/20

26. Септембар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{\ln(x-2)}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^{5x}\cos 6x\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 1.$$

4. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} & \text{ако је } x \neq 0 \\ \pi & \text{ако је } x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$.

5. *Теоријско питање:* Линеарна зависност врста (колона) матрице и ранг матрице.
Пример: Одредити број линеарно независних врста матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/23

26. Септембар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-3}}\,.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{2x \operatorname{arctg} x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19y + 20x - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 2y' + y = (1+x)e^{-x}.$$

5. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Пример: Одредити A^{-1} ако је

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/16

31. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2).$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - x^2}.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x, y) = x + 2e^2 y - e^x - e^{2y}.$$

4. Решити матричну једначину $XA = AB$ ако је:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 28 & 40 & -7 \\ -9 & -11 & 3 \\ 27 & 22 & -15 \end{pmatrix}$$

5. *Теоријско питање:* Диференцијал функције (дефиниција и основне особине).
Пример: Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко њеног прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/17

31. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = (x - y)^4 + 1 \qquad \text{уз услов} \qquad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & az & = & 1 \\ ax & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. *Теоријско питање:* Непрекидност реалне функције једног аргумента на затвореном интервалу: Болцано–Кошијеве (B. Bolzano; A. Cauchy) и Вајерштрасове теореме (K. W. T. Weierstrass).
Пример: Доказати да једначина $x - 3\ln x = 0$ има бар једно решење на интервалу $[1, e]$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/18

31. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{\ln(x+1)}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = \frac{x}{y}\,e^{x/y}$$

задовољава услов

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

5. *Теоријско питање:* Особине низова: монотоност, ограниченост, Болцано–Вајерштрасова теорема (B. Bolzano; K. W. T. Weierstrass).
Пример: Доказати да низ (e_n), дефинисан са

$$e_1 = 2, \quad e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

има тачно једну тачку нагомилавања.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/21

31. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Дискутовати решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 0 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

5. *Теоријско питање:* Асимптоте функција.
Пример: Одредити асимптоте функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-3)^2}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/24

31. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{\ln(x+3)}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \ln \frac{x+1}{x-1} \, \mathrm{d}x.$$

3. Испитати да ли функција

$$z(x,y) = x \operatorname{arctg}(x^2 - y^2)$$

задовољава услов

$$\frac{1}{yz}\left(xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 - e^{-x}.$$

5. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Пример: Одредити A^{-1} ако је

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: ?

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$$

2. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = xy(6 - x - y).$$

3. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2 + 2x - 3} \, \mathrm{d}x.$$

4. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

5. *Теоријско питање:* Извод функције (дефиниција и основне особине).
Пример: Ако је

$$x = \frac{1}{t} \qquad \text{и} \qquad y = t^2 - 3t + 2$$

израчунати $y'(\frac{1}{2})$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 04/16

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{x - 1}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int x^3 e^{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

3. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}.$$

4. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \Leftrightarrow \quad xy \leqslant y^2$$

релација поретка на скупу: **а)** $\mathbb{N}$ природних бројева; **б)** $\mathbb{Z}$ целих бројева.

5. *Теоријско питање:* Општи Кошијев критеријум конвергенције редова.
Пример: Испитати конвергенцију хармонијског и хиперхармонијеског реда.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 04/17

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x - 1}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

где област D представља унутрашњост четвороугла са теменима $A(-2, 0)$, $B(1, -2)$, $C(2, 0)$ и $D(1, 2)$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x, y) = (y - x)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 18.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$\frac{x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{y \, \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

5. *Теоријско питање:* Теорема о базисном минору.
Пример: Одредити бар два базисна минора система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/01

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 4.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \arcsin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = (x-y)^4 + 1 \quad \text{уз услов} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

5. *Теоријско питање:* Диференцијал функције једне променљиве (дефиниција и основне особине).
Пример: Користећи формулу за приближно изражавање диференцијала функције преко његовог прираштаја, израчунати приближну вредност за $\sin 28°$.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/02

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D (x + 2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ако је област D ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 19x - 20y + 1.$$

4. Испитати диференцијабилност функције

$$y = \begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x^2}, & \text{ако је } x \neq 0 \\ \pi, & \text{ако је } x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$.

5. *Теоријско питање:* Ранг матрице (дефиниција и основне особине).
Пример: Одредити ранг матрице A у зависности од вредности реалног параметра a, ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/03

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{21x^2 - 94x + 72}{x^3 - 7x^2 + 12x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

у зависности од вредности реалног параметра a.

5. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова формула.
Пример: Функцију $y = \operatorname{arctg} 2x$, апроксимирати Маклореновим полиномом трећег степена.

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/05

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2. Израчунати:

$$\int_2^{e+1} x \ln(x-1)\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције:

$$z(x,y) = 19y + 20x - x^2 - xy - y^2 + 2.$$

4. Решити диференцијалну једначину

$$y' + y^2 = 0.$$

5. *Теоријско питање:* Непрекидне функције (дефиниција и основне особине).
Пример: Испитати непрекидност функције

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x}, & \text{ако је } x \neq 0 \\ \dfrac{2}{3}, & \text{ако је } x = 0 \end{cases}.$$

Писмени испит из математике

Ознака задатка: 05/06

9. Јануар 2005.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = (x-3)\ln^2(x-3).$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x.$$

3. Апроксимирати функцију $z(x, y) = (2x - 3y)e^{2-x}$ Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $M(2, -1)$.

4. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x - 6\sin x.$$

5. *Теоријско питање:* Инверзна матрица.
Пример: Ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

израчунати A^{-1}.

Писмени испит из математике

I ГРУПА

Јануар 2003.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{21x^2 - 80x + 48}{x^3 - 6x^2 + 8x}\, dx.$$

3. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & ay & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине:

$$y'' - 7y' + 12y = 3x + e^{4x}$$

5. *Теоријско питање:* Условна вероватноћа.
Пример: Да би пронашао једну књигу, студент има намеру да обиђе три библиотеке. За сваку библиотеку је једнако вероватно да нема, односно да има ту књигу у свом књижном фонду, а такође, ако библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је иста заузета. Колика је вероватноћа да ће студент добити тражену књигу?

Писмени испит из математике

II ГРУПА

Јануар 2003.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x + \sqrt[3]{x+2}}\, dx.$$

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z = (y - x)^3 + 1$$

уз услов $x^2 + y^2 = 18$.

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & ay & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & 2ay & + & 2z & = & 3a \\ 7x & - & 4ay & + & 8z & = & 11 \end{array}$$

5. *Теоријско питање:* Тејлорова и Маклоренова (Taylor, Maclaurin) формула за функције једног аргумента.
Пример: Развити полином

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

по степенима бинома $x - 2$.

Писмени испит из математике

III ГРУПА

Јануар 2003.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}}$$

2. Израчунати интеграл:

$$\int \frac{21x^2 - 94x + 72}{x^3 - 7x^2 + 12x}\,\mathrm{d}x$$

3. Апроксимирати функцију $f(x) = \cos^2 x$ полиномом четвртог степена у околини тачке $x = 0$.

4. Испитати да ли функција

$$z = e^{x^2+y^2}$$

задовољава услов

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

5. *Теоријско питање:* Детерминанте (Дефиниција и основне особине).
Пример: Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Писмени испит из математике

IV ГРУПА

Јануар 2003.

1. Испитати ток и скицирати график функције:

$$f(x) = \ln^2 x - 4\ln x + 3.$$

2. Израчунати интеграл:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

где D представља унутрашњост четвороугла чије су странице одређене правим линијама $x - y = 0$, $2x - y = 0$, $x - y = 4$ и $2x - y = 4$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z = (x-y)^4 + 1$$

уз услов $x^2 + y^2 = 18$.

4. Зависно од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2ax & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3ax & - & 2y & + & 2z & = & 3a \\ 7ax & - & 4y & + & 8z & = & 11 \end{array}\;.$$

5. *Теоријско питање:* Сложен интересни рачун.
Пример: На колико нарасте улог од 25 000 динара за три године, ако је интересна стопа 6% (па)д и капиталисање годишње?